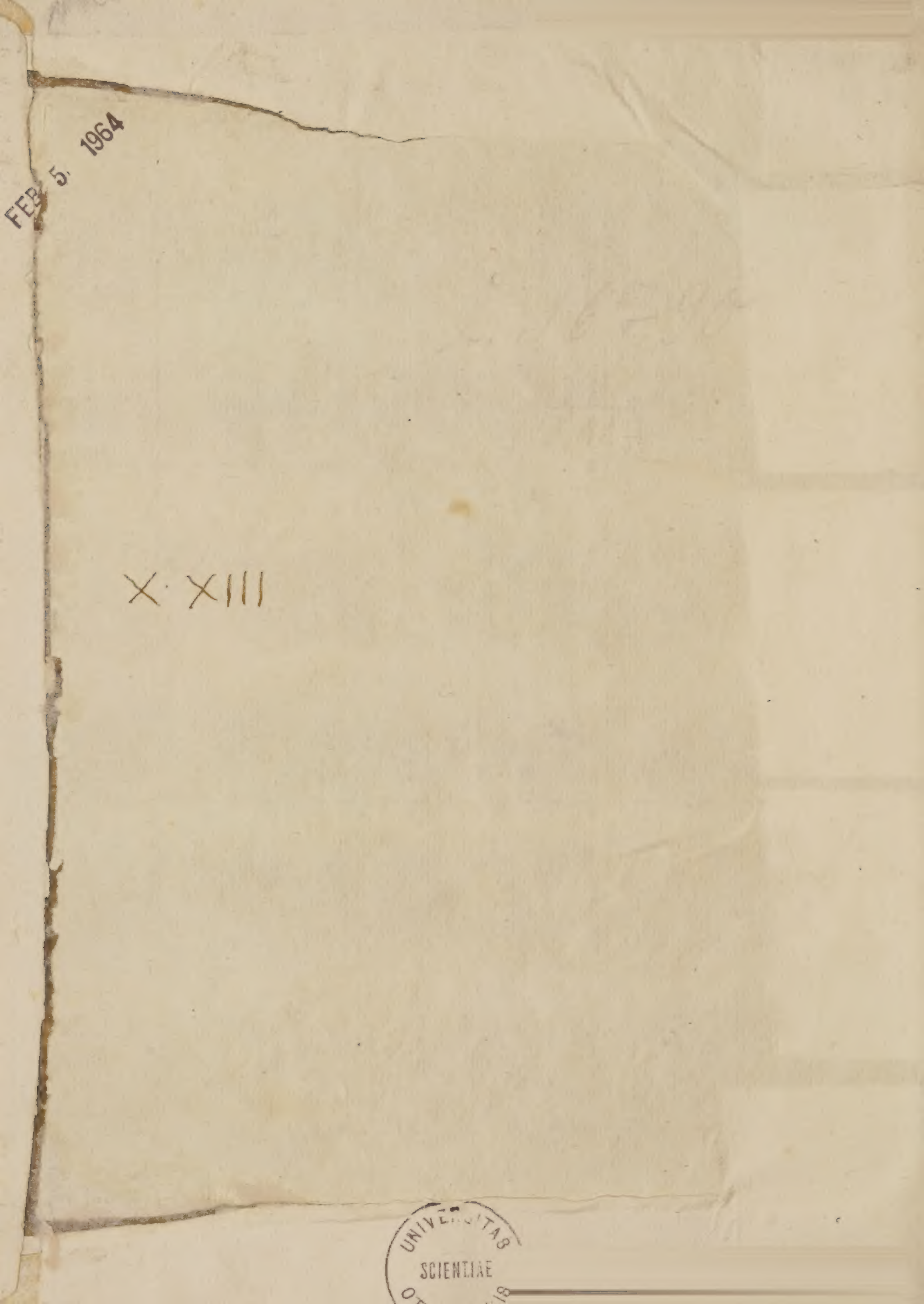

FEB 5, 1964
X·XIII
UNIVERSITAS
SCIENTIAE

38

finch

ANALYSE

DES INFINIMENT PETITS,

POUR

L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.



A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.





PREFACE.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci penetre juſque dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences : & par là elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiémes, quatriémes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter.

De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Une Analyſe de cette nature pouvoit ſeule nous conduire juſqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyſe des infiniment petits de déterminer la poſition de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'eſt-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'infléxion ou de rebrouſſement, les rayons qui s'y réfléchiſſent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inſcrits ou circonſcrits aux courbes, qui par la multiplication infinie de leurs côtés, ſe confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'eſt que depuis la découverte de l'Analyſe dont il s'agit ici, que l'on a bien ſenti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens ſur ces matiéres, principalement d'*Archimede*, eſt aſſurément digne d'admiration. Mais outre

qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement; ce ne ſont preſque par tout que propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font apercevoir aucune méthode réguliere & ſuivie. Ce n'eſt pas cependant qu'on leur en puiſſe faire un reproche légitime : ils ont eu beſoin d'une extrême force de génie * pour percer à travers tant d'obſcurités, & pour entrer les premiers dans des païs entiérement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits; du moins, quoi qu'en diſe † *Viette*, ils ne ſe ſont point égarés : & plus les chemins qu'ils ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y être pas perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pû faire davantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin; mais on ne ſçauroit aſſés s'étonner que de grands hommes, & ſans doute d'auſſi grands hommes

* *Archimedis de lineis ſpiralibus tractatum cum bis terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium adſequerer; nuſquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam, &c.* Bullialdus Præf. de lineis ſpiralibus.

† *Si verè Archimedes, fallaciter concluſit Euclides, &c.* Suppl. Geom.

que les Anciens, en ſoient ſi long-temps demeurés là; & que par une admiration preſque ſuperſtitieuſe pour leurs ouvrages, ils ſe ſoient contentés de les lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'autre uſage de leurs lumiéres, que ce qu'il en falloit pour les ſuivre; ſans oſer commettre le crime de penſer quelquefois par eux-mêmes, & de porter leur vuë au delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette maniére bien des gens travailloient, ils écrivoient, les Livres ſe multiplioient, & cependant rien n'avançoit: tous les travaux de pluſieurs ſiecles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpectueux commentaires & de traductions répetées d'originaux ſouvent aſſés mépriſables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & ſur tout de la Philoſophie, juſqu'à M. *Deſcartes*. Ce grand homme pouſſé par ſon génie & par la ſupériorité qu'il ſe ſentoit, quitta les Anciens pour ne ſuivre que cette même raiſon que les Anciens avoient ſuivie; & cette heureuſe hardieſſe, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vuës nouvelles & utiles ſur la Phyſique & ſur la Géometrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer.

Pour ne parler que des Mathématiques,

dont il eſt ſeulement ici queſtion, M. *Deſcartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la ſolution d'un Problême où *Pappus* dit * qu'ils étoient tous demeurés. On ſçait juſqu'où il a porté l'Analyſe & la Géometrie, & combien l'alliage qu'il en a fait, rend facile la ſolution d'une infinité de Problêmes qui paroiſſoient impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la réſolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes qu'autant qu'elles lui pouvoient ſervir à en trouver les racines: de ſorte que l'Analyſe ordinaire lui ſuffiſant pour cela, il ne s'aviſa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laiſſé de s'en ſervir heureuſement dans la recherche des tangentes; & la Méthode qu'il découvrit pour cela, lui parut ſi belle, qu'il ne fit point de difficulté de dire, *que *ce Problême étoit le plus utile & le plus général, non ſeulement qu'il ſçût, mais même qu'il eût jamais deſiré de ſçavoir en Géometrie.*

* *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

* *Geomet. Liv. 2.*

Comme la Géometrie de M. *Deſcartes* avoit mis la conſtruction des Problêmes par la réſolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela; la plûpart des Géometres s'y appliquérent, ils y firent auſſi de nouvelles découvertes, qui

s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Paschal*, il tourna ses vuës de tout un autre côté : il éxamina les courbes en elles-mêmes, & sous la forme de polygone ; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'espace qu'elles renferment, le solide que ces espaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et par la considération seule de leurs élémens, c'est-à-dire des infiniment petits, il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus surprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes, M. *de Fermat* en trouva aussi une, que M. *Descartes* a enfin avoué * lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrow* l'a rendue depuis en considérant de plus près la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes ;

* *Lett.* 71. *Tom.* 3.

res ; & ce triangle eſt ſemblable à celui qui ſe doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la ſoutangente : de ſorte que par une ſimple Analogie cette derniere Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Deſcartes*, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrow* * n'en demeura pas là, il inventa auſſi une eſpece de calcul propre à cette Méthode ; mais il lui falloit, auſſi-bien que dans celle de M. *Deſcartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les ſignes radicaux pour s'en ſervir.

* *Lect. Geomet. p.* 80.

Au défaut de ce calcul eſt ſurvenu celui du célebre * M. *Leibnis* ; & ce ſçavant Géometre a commencé où M. *Barrow* & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des païs juſqu'ici inconnus ; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M[rs] *Bernoulli* ont été les premiers qui ſe ſont aperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de ſurmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais oſé tenter auparavant.

* *Acta Erud. Lipſ. an.* 1684. *p.* 467.

L'étendue de ce calcul eſt immenſe : il convient aux courbes mécaniques, comme aux

géometriques ; les ſignes radicaux lui ſont indifferens ; & même ſouvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaiſon des infiniment petits de tous les genres lui eſt également facile. Et de là naiſſent une infinité de découvertes ſurprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux queſtions *De maximis & minimis*, aux points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes, aux dévelopées, aux cauſtiques par réfléxion ou par refraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le diviſe en dix Sections. La premiere contient les principes du calcul des différences. La ſeconde fait voir de quelle maniére l'on s'en doit ſervir pour trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime, quoique M. *Craige* * n'ait pas crû qu'il pût s'étendre juſqu'aux courbes mécaniques ou tranſcendantes. La troiſiéme, comment il ſert à réſoudre toutes les queſtions *De maximis & minimis*. La quatriéme, comment il donne les points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes. La cinquiéme en découvre l'uſage pour trouver les dévelopées de M. *Hugens*, dans toutes ſortes de courbes.

* *De figurarum curvilinearum quadraturis, part.* 2.

La ſixiéme & la ſeptiéme font voir comment il donne les cauſtiques, tant par réfléxion que par réfraction, dont l'illuſtre M. *Tſchirnhaus* eſt l'inventeur, & pour toutes ſortes de courbes encore. La huitiéme en fait voir encore l'uſage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de poſition, droites ou courbes. La neuviéme contient la ſolution de quelques Problêmes qui dépendent des découvertes précedentes. Et la dixiéme conſiſte dans une nouvelle maniére de ſe ſervir du calcul des différences pour les courbes géometriques : d'où l'on déduit la Méthode de M.rs *Deſcartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces ſortes de courbes.

Il eſt à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très peu de propoſitions; mais elles ſont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il eſt aiſé de faire l'application à tant de propoſitions particulieres qu'on voudra : je la fais ſeulement ſur quelques éxemples choiſis, perſuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne conſiſtent qu'en détail ou en propoſitions particulieres, ne ſont bons qu'à faire perdre

du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les lisent. Aussi n'ai-je ajoûté les Problêmes de la Section neuviéme, que parcequ'ils passent pour curieux, & qu'ils sont très universels. Dans la dixiéme Section ce ne sont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de Mrs *Descartes* & *Hudde*; & si elles sont si limitées, on voit par toutes les précedentes que ce n'est pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartésienne à laquelle on l'assujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'usage immense de ce calcul, que toute cette varieté de Méthodes; & pour peu d'attention qu'on y fasse, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de Mrs *Descartes* & *Hudde*, & que la preuve universelle qu'il donne de l'usage qu'on y fait des progressions arithmétiques, ne laisse plus rien à souhaiter pour l'infaillibilité de cette derniere Méthode.

J'avois dessein d'y ajoûter encore une Section pour faire sentir aussi le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique, jusqu'à quel point de précision il la peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché;

Le public n'y perdra pourtant rien, & il l'aura quelque jour même avec uſure.

Dans tout cela il n'y a encore que la premiere partie du calcul de M. *Leibnis*, laquelle conſiſte à deſcendre des grandeurs entiéres à leurs différences infiniment petites, & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils ſoient : c'eſt ce qu'on appelle *Calcul différentiel*. Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui conſiſte à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils ſont les différences, c'eſt-à-dire à en trouver les ſommes, j'avois auſſi deſſein de le donner. Mais M. *Leibnis* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le public d'un ſi bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverſe des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, pour celles des ſurfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimenſion de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parcequ'il m'en a prié par ſes Lettres, & que je le crois néceſſaire pour préparer les eſprits

à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la ſuite ſur ces matiéres.

Au reſte je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs *Bernoulli*, ſur tout à celles du jeune preſentement Profeſſeur à Groningue. Je me ſuis ſervi ſans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*. C'eſt pourquoi je conſens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laiſſer.

C'eſt encore une juſtice dûë au ſçavant M. *Neuwton*, & que M. *Leibnis* lui a renduë* lui-même: Qu'il avoit auſſi trouvé quelque choſe de ſemblable au calcul différentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé *Philoſophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel eſt preſque tout de ce calcul. Mais la Caracteriſtique de M. *Leibnis* rend le ſien beaucoup plus facile & plus expeditif; outre qu'elle eſt d'un ſecours merveilleux en bien des rencontres.

* *Journal des Sçavans du 30 Aouſt 1694.*

Comme l'on imprimoit la derniere feüille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuwentiit* m'eſt tombé entre les mains. Son titre, *Analyſis infinitorum*, m'a donné la curioſité de le parcourir: mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci; car outre que cet Auteur

ne ſe ſert point de la Caracteriſtique de M. *Leibnis*, il rejette abſolument les différences ſecondes, troiſiémes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage ſur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ſes objections, & de faire voir combien elles ſont peu ſolides, ſi M. *Leibnis* n'y avoit déja pleinement ſatisfait dans les Actes * de Leypſick. D'ailleurs les deux demandes ou ſuppoſitions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & ſur leſquelles ſeules il eſt appuyé, me paroiſſent ſi évidentes, que je ne crois pas qu'elles puiſſent laiſſer aucun doute dans l'eſprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la maniére des Anciens, ſi je ne me fuſſe propoſé d'être court ſur les choſes qui ſont déja connues, & de m'attacher principalement à celles qui ſont nouvelles.

* *Acta Erud. an.* 1695 *p.* 310 & 369.



TABLE.

ANALYSE



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.
Où l'on donne les regles de ce Calcul.

DÉFINITION I.



N appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la
Fig. 1. *Différence.* Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ſes appliquées la droite *PM*; & ſoit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on decrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* ſera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour baſe l'arc *Mm*, ſera la difference du ſegment *AM*; & le petit eſpace *MPpm*, celle de l'eſpace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

COROLLAIRE.

1. IL eſt évident que la différence d'une quantité conſtante eſt nulle ou zero: ou (ce qui eſt la même choſe) que les quantités conſtantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On ſe ſervira dans la ſuite de la note ou caracteriſtique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une ſeule lettre; & pour éviter la confuſion, cette note* d *n'aura point d'autre uſage dans la ſuite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'eſpace mixtiligne* APM, s; *& le ſegment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit eſpace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puiſſe prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui eſt la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par éxemple qu'on puisse prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'espace Apm pour l'espace APM, le petit espace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par éxemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c marquent des quantités constantes : de sorte que* x *devenant* x + dx ; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* * *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la difference. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'est à dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

** Art. 1.* viendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la constante a,*elle demeurera la même a: de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la difference cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa difference sera ydx
... 2. $+ xdy + dxdy$, c'est à dire *$ydx + xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise par éxemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la difference du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la difference dz

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo + adx$, c'est à dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est à dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle. * *Art.* 5.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au

produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarre du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression geométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmetique.

Prog. geom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continue la progression geométrique au dessous de l'unité, & l'arithmetique au dessous de zero, les termes de celle-ci seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression geométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmetique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expres-

ſions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne ſignifient que la même choſe.

Prog. geom. $1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$

Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$

Prog. geom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$

Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2.\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2.\ -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ eſt moyenne geométrique entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{2}$ eſt moyenne arithmetique entre leurs expoſans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ eſt la premiere des deux moyennes geometriquement proportionnelles entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{3}$ eſt la premiere des deux moyennes arithmetiquement proportionnelles entre leurs expoſans zero & 1 : & il en eſt ainſi des autres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions

1°. Que la ſomme des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'eſt à dire ſon quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 eſt le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'eſt à dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ où $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatriéme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du

quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est à dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par
*Art. 5. x, sa différence * sera $xdx + xdx$, c'est à dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence * sera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'est à dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la difference de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est à dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la difference de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les Puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantite variable, eſt egale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliee par ſa différence.

Ainſi ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantite variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'eſt à dire de $\overline{ay - xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, ou de $\overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3} \times \overline{ax + xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ou de $\overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$.

* *Art.* 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle*& celle des fractions $\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx^2}} \times \sqrt{xy+yy} \; \frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}} \times \sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

8. Il est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les differences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi; c'est à dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est pourquoi s'il arrive que quelques unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les differences comme des quantités negatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par consequent les signes des termes où les differences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminuent, c'est à dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la difference du produit xyz; il faudra changer
* *Art.* 5. dans la différence $xydz + xzdy + yzdx$ trouvee *, les signes des termes où dy & dz se rencontrent : ce qui donne $yzdx - xydz - xzdy$ pour la différence cherchée.



SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DE'FINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du poligone qui compose * une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*. Fig. 2. * *Art.* 3.

PROPOSITION I.

Problême.

9. SOIT *une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT. Fig. 3.

Ayant mené l'appliquée *MP*, & supposé que la droite *MT* qui rencontre le diametre au point *T*, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite *MR* parallele à *AP*. Et en nommant les données *AP*, x ; *PM*, y ; (donc *Pp* ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables *mRM* & *MPT* donneront *mR* (dy). *RM* (dx : : *MP* (y). $PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente *PT* en termes entiérement connus & delivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée *MT*.

REMARQUE.

10. LORSQUE le point *T* tombe du côté opposé au point *A* origine des x, il est clair que x croissant, y dimi- Fig. 4.

* *Art.* 8. nue, & qu'il faut changer par conséquent* dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où dy se rencontre : autrement la valeur de dx en dy seroit négative ; & partant aussi celle de PT ($\frac{ydx}{dy}$). Il est mieux cependant, pour ne se point embarasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on
* *Sect.* 1. a prescrites * sans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

EXEMPLE I.

FIG. 3. II. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy sa valeur ax. D'où il suit que si l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle sera tangente au point M. Ce qui étoit proposé.

FIG. 4. 2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes. On aura en prenant les differences $xdy + ydx = 0$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= - x$. D'où il suit que si l'on prend $PT = PA$ du côté opposé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle sera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorsque l'exposant m marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les differences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= my^m = mx$ en mettant pour y^m sa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation sera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la soutangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation sera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la soutangente $PT = -2x$. Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raison de dx à dy en ce point ; car il est visible que cette raison étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre sera aussi determiné. On a dans cet éxemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raison de dy à dx doit y être infiniment grande lorsque m surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre : c'est à dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diametre dans le second.

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ $(x \times \overline{a-x}) . \overline{PM}^2 (yy) :: AB (a) . AD (b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les differences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT \left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$. Fig. 5.

Supposant à présent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2 (x^3 \times \overline{a-x}^2) . \overline{PM}^5 (y^5) :: AB (a) . AD (b)$, on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$, & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x}$ ou $\frac{5ax - 5xx}{3x - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$.

Et généralement si l'on veut que *m* marque l'exposant de la puissance de *AP*, & *n* celui de la puissance de *PB*, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a - x}^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m+n}\,ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a - x}^n - \overline{na - x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^m \times \overline{a - x}^n$) $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}\,x^m \times \overline{a - x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a - x}^n - \overline{na - x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}\,x \times \overline{a - x}}{ma - x - nx}$, ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax - xx}}{ma - \overline{m - nx}}$, & $AT = \frac{nax}{ma - \overline{m - nx}}$.

EXEMPLE III.

FIG. 6. 13. LES mêmes choses étant posées que dans l'éxemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point *B* tombe de l'autre côté du point *A* par rapport au point *P*, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a + x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considerées par rapport à leurs diametres. D'où l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax + xx}}{ma + \overline{m + nx}}$ & $AT\ \frac{nax}{ma + \overline{m + nx}}$.

Maintenant si l'on suppose que *AP* soit infiniment grande, la tangente *TM* ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est à dire qu'elle en deviendra l'asymptote *CE*; & l'on aura en ce cas $AT\left(\frac{nax}{ma + \overline{m + nx}}\right) = \frac{n}{m+n}a = AC$; puisque *a* étant infiniment moindre que *x*, le terme *ma* sera nul par rapport à $\overline{m + nx}$. Par la même raison en ce cas l'equation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainsi en faisant pour abréger $m + n = p$, & en extrayant de part & d'autre la racine *p*, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la difference est $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant *AE* parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote *CE* rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx . dy$, ou $\sqrt[p]{a} . \sqrt[p]{b} :: AC\ (\frac{n}{p}a) . AE = \frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les

valeurs de CA & AE étant ainsi déterminées, on menera la droite indéfinie CF qui sera l'asymptote cherchée.

Si $m = 1$ & $n = 1$, la courbe sera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC = \frac{1}{2}a$, & $AE = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'est à dire à la moitié du diametre conjugué, ce que l'on sçait d'ailleurs être conforme à la vérité.

EXEMPLE IV.

14. SOIT l'équation $y^3 - x^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, a est une ligne droite donnée) & que cette équation exprime la nature de la courbe AM, sa différence sera $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, & AT $\left(\frac{ydx}{dy} - x\right) = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay}$ en mettant pour $3y^3 - 3x^3$ sa valeur $3axy$. FIG. 6.

Maintenant si l'on suppose que AP & PM soient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'asymptote CE, & les droites AT, AS deviendront AC, AE qui déterminent la position de l'asymptote. Or AT que j'appelle $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, d'où l'on tire $y = \frac{3txx}{ax - at} = \frac{3tx}{a}$ lors que AT devient AC, parcequ'alors at est nulle par rapport à ax. Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3 - x^3 = axy$, on aura $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^3txx$, parceque x étant infinie, il est nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) $AC\,(t) = \frac{1}{3}a$. De même AS $\left(y - \frac{xdy}{dx}\right)$ que j'appelle $s = \frac{axy}{3yy - ax}$, d'où l'on tire $x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a}$, parceque y étant infinie par rapport à s, le terme as sera nul par rapport au terme ay; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera $AE\,(s) = \frac{1}{3}a$. D'où il suit que si l'on prend les lignes AC, AE égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie CE, elle sera l'asymptote de la courbe AM.

On ſe réglera ſur ces deux derniers éxemples pour trouver les aſymptotes des autres lignes courbes.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 7. 15. *Si l'on ſuppoſe dans la propoſition précédente que les coupées* AP *ſoient des portions d'une ligne courbe dont l'on ſçache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *ſur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & ſuppoſé que la droite MT qui la rencontre en T, ſoit la tangente cherchée ; on imaginera une autre appliqué mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT : & en nommant les données AP, x ; PM, y ; on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy$, & les triangles ſemblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy) . RM\,(dx) :: MP\,(y) . PT = \frac{ydx}{dy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP\,(x)$ aux appliquées $PM\,(y)$, comme l'on a vû dans les éxemples qui précedent, & comme l'on verra encore dans ceux qui ſuivent.

EXEMPLE I.

16. SOIT $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence eſt $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduiſant cette égalité à une proportion $dy . dx\,(MP . PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} . \frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la ſoutangente cherchée PT, ſera exprimé en termes entiérement connus & délivrés des differences. Ce qui étoit propoſé.

EXEM-

EXEMPLE II.

17. SOIT $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence eſt $dx = \frac{ady}{b}$: on aura $PT(\frac{ydx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on ſuppoſe que la ligne courbe *APB* ſoit un demi-cercle, & que les appliquees *MP*, étant prolongées en *Q*, ſoient perpendiculaires ſur le diametre *AB*; la courbe *AMC* ſera une demi-roulette ou cycloïde: ſimple lorſque $b = a$, allongée lorſqu'elle eſt plus grande, & accourcie lorſqu'elle eſt moindre.

COROLLAIRE.

18. SI la roulette étant ſimple, l'on mene la corde *AP*; je dis qu'elle ſera parallele à la tangente *MT*. Car le triangle *MPT* étant alors iſoſcele, l'angle externe *TPQ* ſera double de l'interne oppoſé *TMQ*. Or l'angle *APQ* eſt égal à l'angle *APT*, puiſque l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc *AP*; & partant il eſt la moitié de l'angle *TPQ*. Les angles *TMQ*, *APQ* ſeront donc égaux entr'eux; & par conſequent les lignes *MT*, *AP* ſeront paralleles.

PROPOSITION III.

Problême.

19. SOIT *une ligne courbe quelconque* AP *qui ait pour diametre la droite* KNAQ, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PK; *ſoit de plus une autre courbe* AM *telle que menant comme on voudra, l'appliquée* MQ *qui coupe la premiere courbe au point* P, *la relation de l'arc* AP *à l'appliquée* MQ *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *mener la tangente* MN. FIG. 7.

Ayant nommé les connues *PK*, t; *KQ*, s; l'arc *AP*, x; *MQ*, y; l'on aura (en concevant une autre appliquée *mq* infiniment proche de *MQ*, & en tirant *PO*, *MS* paralleles à *AQ*.) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cauſe des triangles ſemblables *KPQ* & *PpO*, *mSM* & *MQN*, l'on aura *PK* (t).

$KQ(s) :: Pp(dx)$. PO ou $MS = \frac{sdx}{t}$. Et $mS(dy)$. $SM(\frac{sdx}{t}) :: MQ(y)$. $QN = \frac{sydx}{tdy}$. Or par le moyen de la difference de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui ſeront tous affectes par dy, & partant ſi l'on ſubſtitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sdx}{tdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente cherchée QN ſera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problême.

Fig. 8. 20. SOIENT *deux lignes courbes* AQC, BCN *qui ayent pour diametre la droite* TEABF, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* QE, NF; *ſoit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur cette derniere courbe lui mener la tangente* MT.

Ayant imaginé aux points Q, M, N, les petits triangles QOq, MRm, NSn, & nommé les connues PE, s; PF, t; PQ, x; PM, y; PN, z; l'on aura $Oq = dx$, $Rm = dy$, Sn

* Art. 8. $= -dz$,* parceque x & y croiſſant, z diminue. Et à cauſe des triangles ſemblables QPE & qOQ, NPF & nSN, MPT & mRM; l'on aura $QP(x)$. $PE(s) :: qO(dx)$. OQ ou MR ou $SN = \frac{sdx}{x}$. Et $NP(z)$. $PF(t) :: nS(-dz)$. $SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et $mR(dy)$. $RM(\frac{sdx}{x}) :: MP(y)$. $PT = \frac{sydx}{xdy}$. Or ſi l'on met dans la difference de l'équation donnée, à la place de dz, ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente PT ſera exprimée en termes tous connus.

EXEMPLE.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence eſt $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur négative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant PT $\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t-s}$, en mettant pour yy ſa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence eſt $\overline{m+n}\,y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur $\frac{-szdx}{tx}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{\overline{mst + nst}\,y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} ſa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que ſi les courbes *AQC*, *BCN* devenoient des lignes droites, la courbe *MC* ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini; ſçavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée *CD*, qui part du point de rencontre *C*, tombe entre les extremités *A*, *B*; une Hyperbole lorſqu'elle tombe de part ou d'autre; & enfin une Parabole lorſque l'une des extremités *A* ou *B* eſt infiniment eloignée de l'autre, c'eſt à dire lorſque l'une des lignes droites *CA* ou *CB* eſt parallele au diametre *AB*.

PROPOSITION V.

Problême.

22. SOIT *une ligne courbe* APB *qui ait un commencement fixe & invariable au point* A, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PH; *ſoit hors de cette ligne un autre point fixe* F, *& une autre ligne courbe* CMD *telle qu'ayant mené la droite quelconque* FMP, *la relation de ſa partie* FM *à la portion de courbe* AP *ſoit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propoſe de mener du point donné* M *la tangente* MT. FIG. 9.

Ayant mené ſur *FP* la perpendiculaire *FH* qui rencon-

tre la tangente donnée PH au point H, & la cherchée MT au point T, imaginé une droite $FRmOp$ qui fasse avec FP un angle infiniment petit, & décrit du centre F les petits arcs du cercle PO, MR; le petit triangle pOP sera semblable au triangle rectangle PFH; car les angles HPF, HpF sont * égaux, puisqu'ils ne different entr'eux que de l'angle PFp que l'on suppose infiniment petit, & de plus l'angle pOP est droit, puisque la tangente en O (qui n'est autre chose que la continuation du petit arc PO considéré comme une droite) est perpendiculaire sur le rayon FO. Par la même raison les triangles mRM, MFT seront semblables. Or il est clair que les petits triangles ou secteurs FPO & FMR sont semblables. Si donc l'on nomme les connues PH, t; HF, s; FM, y; FP, z; & l'arc AP, x; on aura $PH(t) . HF(s) :: Pp(dx) . PO = \frac{sdx}{t}$. Et $FP(z) . FM(y) :: PO\left(\frac{sdx}{t}\right) . MR = \frac{ysdx}{tz}$. Et $mR(dy) . RM\left(\frac{ysdx}{tz}\right) :: FM(y) . FT = \frac{syydx}{tzdy}$. Et on achevera le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée.

* Art. 2.

EXEMPLE.

Fig. 10. 23. Si l'on veut que la courbe APB soit un cercle qui ait pour centre le point fixe F; il est clair que la tangente PH devient parallele & égale à la soutangente FH, à cause que HP sera aussi perpendiculaire à PF; & qu'ainsi l'on aura en ce cas $FT = \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$, en nommant la droite $FP(z)$, a; parcequ'elle devient constante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela posé, si l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ses portions déterminées, b; & que l'on fasse $b . x :: a . y$, la courbe CMD, qui est en ce cas FMD, sera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour sa difference $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a} = xdy$ en mettant pour y sa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant $FT\left(\frac{yydx}{ady}\right) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit décrit du centre *F* & du rayon *FM*, l'arc de cercle *MQ*, terminé en *Q* par le rayon *FA* qui joint les points fixes *A*, *F*; ſoit pris *FT* égale à l'arc *MQ* : je dis que la droite *MT* ſera tangente en *M*. Car à cauſe des ſecteurs ſemblables *FPA*, *FMQ*, l'on aura $FP (a) . FM (y) :: AP (x) . MQ = \frac{yx}{a} = FT$.

Si l'on fait en général $b . x :: a^m . y^m$, (l'expoſant *m* déſigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe *FMD* ſera une des ſpirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour ſa différence $my^{m-1}dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$, en mettant pour y^m ſa valeur $\frac{a^m x}{b}$; & partant $FT (\frac{yydx}{ady}) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ$.

PROPOSITION VI.

Problême.

24. SOIT *une ligne courbe* APB *dont l'on ſçache mener* FIG. 11. *les tangentes* PH, *& un point fixe* F *hors de cette ligne; ſoit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme on voudra, la droite* FPM, *la relation de* FP *à* FM *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné* M *mener la tangente* MT.

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire ſur FM, & imaginé comme dans la propoſition précédente les petits triangles *POp*, *MRm* ſemblables aux triangles *HFP*, *TFM*, on nommera les connues *FH*, *s*; *FP*, *x*; *FM*, *y*; & l'on aura $PF (x) . FH (s) :: pO (dx) . OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP (x) . FM (y) :: OP (\frac{sdx}{x}) . RM = \frac{sydx}{xx}$. Et $mR (dy) . RM (\frac{sydx}{xx}) :: FM (y) . FT = \frac{syydx}{xxdy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de la difference de l'équation donnée.

EXEMPLE.

25. Si l'on veut que la courbe APB soit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM soit $y - x = a$, c'est à dire que PM soit toujours égale à la même droite donnée a; l'on aura pour difference $dy = dx$; & partant $FT \left(\frac{syydx}{xxdy}\right) = \frac{syy}{xx}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée ME parallele à PH, & MT parallele à PE; je dis qu'elle sera tangente en M.

Car $FP(x) . FH(s) :: FM(y) . FE = \frac{sy}{x}$. Et $FP(x) . FE\left(\frac{sy}{x}\right) :: FM(y) . FT = \frac{syy}{xx}$. Il est clair que la courbe CMD est la Conchoïde de *Nicomede*, dont l'asymptote est la droite PH, & le pole est le point fixe F.

PROPOSITION VII.

Problême.

FIG. 12. 26. SOIT *une ligne courbe* ARM *dont l'on sçache mener les tangentes* MH, *& qui ait pour diametre la droite* EPAHT, *soit hors de ce diametre un point fixe* F, *d'où parte une ligne droite indéfinie* FPSM *qui coupe le diametre en* P *& la courbe en* M. *Si l'on conçoit maintenant que la droite* FPM, *en tournant autour du point* F, *fasse mouvoir le plan* PAM *toujours parallelement à soi-même le long de la ligne droite* ET *immobile & indéfinie, en sorte que la distance* PA *demeure partout la même; il est clair que l'intersection continuelle* M *des lignes* FM, AM *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CMD. *On propose de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que le plan PAM soit parvenu dans la situation infiniment proche pam, & tiré la ligne mRS parallele à AP; il est clair par la génération que $Pp = Aa = Rm$; & partant que $RS = Sm - Pp$. Or nommant les connues FP ou Fp, x; FM ou Fm, y; PH, s; MH, t; &

la difference Pp, dz; les triangles semblables FPp & FSm, MPH & MSR, MHT & MRm, donneront Fp $(x) . Fm (y) :: Pp (dz) . Sm = \frac{ydz}{x}$ (donc $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$).

Et $PH (s) . HM (t) :: SR (\frac{ydz - xdz}{x}) . RM = \frac{tydz - txdz}{sx}$.

Et $MR (\frac{tydz - txdz}{sx}) . Rm (dz) :: MH (t) . HT = \frac{sx}{y - x}$.

Donc si l'on mene FE parallele à MH, & qu'on prenne $HT = PE$; la ligne MT sera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la courbe CMD seroit une Hyperbole qui auroit pour une de ses asymptotes la ligne ET. Et si elle étoit un cercle qui eût son centre au point P; la courbe CMD seroit la Conchoïde de *Nicomede*, qui auroit pour asymptote la ligne ET, & pour pole le point F. Mais si elle etoit une parabole; la courbe CMD seroit la compagne de la Paraboloïde de *Descartes* *, qui se décriroit en même temps au dessous de la droite ET par l'intersection de FP avec l'autre moitié de la Parabole.

* *Geom. Liv.* 3.

PROPOSITION VIII.

Problême.

27. SOIT *une ligne courbe* AN *qui ait pour diametre la ligne droite* AP, *avec un point fixe* F *hors de ces lignes; soit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme l'on voudra, la droite* FMPN, *la relation de ses parties* FN, FP, FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné* M *la tangente* MT. FIG. 13.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diametre AP, & en H la tangente donnée NH; soient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM des petits arcs de cercle NQ, PO, MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK, s; FH, t; FP, x; FM y; FN, z; les triangles semblables PFK & pOP, FMR &

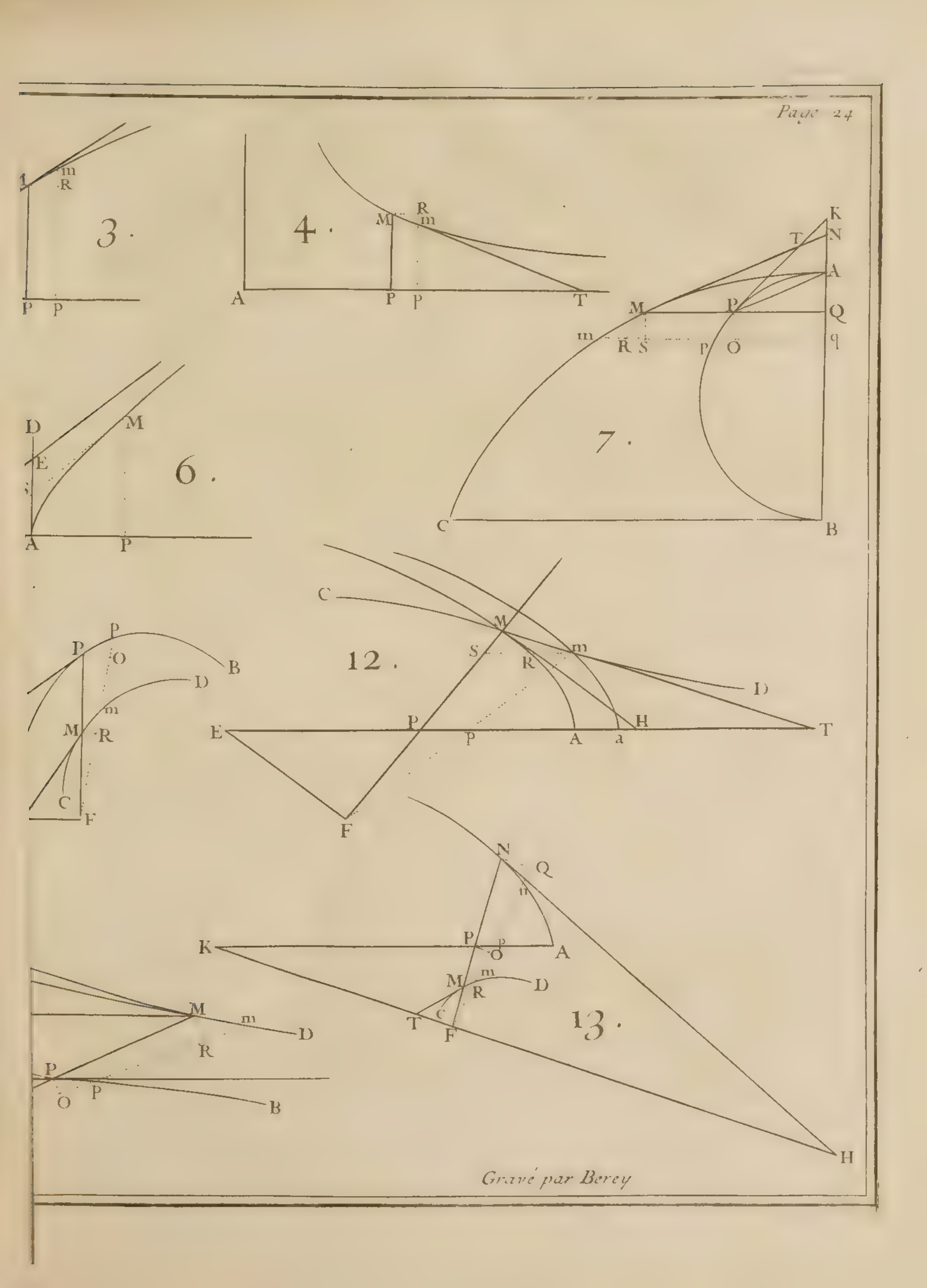
FPO & *FNQ*, *HFN* & *NQn*, *mRM* & *MFT* donneront $PF\,(x).\ FK\,(s) :: pO\,(dx).\ OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP\,(x).\ FM\,(y) :: PO\,(\frac{sdx}{x}).\ MR\frac{sydx}{xx}$. Et $FP\,(x).\ FN\,(z) :: PO\,(\frac{sdx}{x}).\ NQ = \frac{szdx}{xx}$. Et $HF\,(t).\ FN\,(z) :: NQ\,(\frac{szdx}{xx}).\ Qn\,(-dz) = \frac{szzdx}{txx}$. Et $mR\,(dy).\ RM\,(\frac{sydx}{xx}) :: FM\,(y).\ FT = \frac{syydx}{xxdy}$. Or par le moyen de la difference de l'équation donnée on trouvera une valeur de dy en dx & dz, dans laquelle mettant à la place de dz sa valeur négative $-\frac{szzdx}{txx}$, parceque x croissant, z diminue; tous les termes seront affectés par dx; de sorte que cette valeur étant enfin substituée dans $\frac{syydx}{xxdy}$, les dx se détruiront. Et partant la valeur de *FT* sera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

Si l'on supposoit que la ligne droite *AP* fût une ligne courbe, & qu'on menât la tangente *PK*; on trouveroit toujours pour *FT* la même valeur, & le raisonnement demeureroit le même.

EXEMPLE.

Fig. 14. 28. SUPPOSONS que la ligne courbe *AN* soit un cercle qui passe par le point *F* (tellement situé à l'egard du diametre *AP* que la ligne *FB* perpendiculaire à ce diametre passe par le centre *G* de ce cercle), & que *PM* soit toujours egale à *PN*; il est clair que la courbe *CMD*, qui devient en ce cas *FMA*, sera la Cissoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation $z + y = 2x$, dont la différence est $dy = 2dx - dz = \frac{2txxdx + szzdx}{txx}$ en mettant pour dz sa valeur $-\frac{szzdx}{txx}$ trouvée ci-dessus *. Et partant *FT*
* Art. 27. $(\frac{syydx}{xxdy}) = \frac{styy}{2txx + szz}$.

Si le point donné *M* tomboit sur le point *A*, les lignes *FM*, *FN*, *FP* seroient égales chacune à *FA*, comme aussi les



3.
4.
6.
7.
12.
13.
Gravé par Berey

les droites FK, FH; & partant on auroit en ce cas $FT = \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$, c'est à dire que si l'on prend $FT = \frac{1}{3}AF$, & qu'on mene la ligne AT, elle sera tangente en A.

On peut encore trouver les tangentes de la Cissoïde par le moyen de la premiere Proposition, en menant les perpendiculaires NE, ML sur le diametre FB, & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM; ce qui se fait ainsi. Ayant nommé les connues FB, $2a$; FL ou BE, x; LM, y; les triangles semblables FEN, FLM, & la proprieté du cercle donneront $FL (x) . LM (y) :: FE . EN :: EN (\sqrt{2ax - xx}) . EB (x)$. D'où l'on tire $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, dont la difference est $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{\overline{2a - x}^2}$. Et partant LO* $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{yy \times \overline{2a - x}^2}{3axx - x^3}$ *Art. 9. $= \frac{2ax - xx}{3a - x}$, en mettant pour yy sa valeur $\frac{x^3}{2a - x}$.

PROPOSITION IX.

Problême.

29. SOIENT *deux lignes courbes* ANB, CPD, *& une ligne droite* FKT, *sur lesquelles soient marqués des points fixes* A, C, F; *soit de plus une autre ligne courbe* EMG *telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques* M *la droite* FMN, *&* MP *parallele à* FK; *la relation de l'arc* AN *à l'arc* CP *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *sur la courbe* EG *mener la tangente* MT. FIG. 15.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallele à FM, & par le point donné M les droites MRK, MOH paralleles aux tangentes en P & en N, on tirera $FmOn$ infiniment proche de FMN & mRp parallele à MP.

Cela posé, si l'on nomme les connues FM, s; FN, t; MK, u; CP, x; AN y, (donc Pp ou $MR = dx$, $Nn = dy$) les triangles semblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront $FN (t) . FM (s) :: Nn (dy) . MO = \frac{sdy}{t}$.

Et $MR (dx) . MO (\frac{sdy}{t}) :: MK (u) . MH = \frac{sudy}{tdx}$. Or par le moyen de la difference de l'equation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui seront tous affectés par dx, laquelle étant substituée dans $\frac{sudy}{tdx}$, les dx se detruiront; & partant la valeur de MH sera exprimée en termes entiérement connus. Ce qui donne cette construction.

Soit mené MH parallele à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : soit tirée HT parallele à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M soit menée la tangente cherchée MT.

EXEMPLE.

Fig. 16. 30. Si l'on veut que la courbe ANB soit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F, que la courbe CPD soit le rayon APF perpendiculaire sur la droite $FKGQTB$, & que l'arc $AN (y)$ soit toujours à la droite $AP (x)$ comme le quart de cercle $ANB (b)$ au rayon $AF (a)$; la courbe EMG deviendra la Quadratrice AMG de *Dinostrate*, & l'on aura $MH (\frac{sudy}{tdx}) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$, puisque FP ou $MK (u) = a - x$, & $FN (t) = a$. Mais l'analogie supposée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de MH à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{bdx}{a}$, on trouvera $MH = \frac{bs - ys}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée MH perpendiculaire sur FM, & égale à l'arc MQ décrit du centre F, & soit tirée HT parallele à FM; je dis que la ligne MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables FNB, FMQ, l'on aura $FN (a) . FM (s) :: NB (b - y) . MQ = \frac{bs - sy}{a}$.

COROLLAIRE.

Fig. 17. 31. Si l'on veut déterminer le point G où la quadratrice AMG rencontre le rayon FB, on imaginera un autre rayon Fgb infiniment proche de FGB; & en menant gf parallele à FB, la propriété de la quadratrice

& les triangles semblables FBb, gfF, réctangles en B & en f, donneront $AB . AF :: Bb . Ff :: FB$ ou AF gf ou FG. D'où l'on voit que si l'on prend une troisiéme proportionnelle au quart de cercle AB & au rayon AF, elle sera égale à FG, c'est à dire que $FG = \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu lieu d'abréger la construction des tangentes.

Car menant TE parallele à MH, les triangles semblables FMK, FTE donneront MK $(a - x) . MF (s) :: ET$ ou MH $(\frac{bs - sy}{a}) . FT = \frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$. en mettant pour x sa valeur $\frac{ay}{b}$, & divisant ensuite le tout par $b - y$; d'où il est clair que la ligne FT est troisiéme proportionnelle à FG & à FM. Fig. 16.

PROPOSITION X.

Problême.

32. SOIT *une ligne courbe* AMB *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *aux foyers* F, G, H, *&c. les droites* MF, MG, MH, *&c. leur relation soit exprimée par une équation quelconque : & soit proposé de mener du point donné* M *la perpendiculaire* MP *sur la tangente en ce point.* Fig. 18.

Ayant pris sur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit, & mené les droites FRm, GmS, HmO, on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO; ensuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E, d'où l'on abaissera sur MP les perpendiculaires CL, DK, EI. Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles réctangles MRm, MLC sont semblables; car en ôtant des angles droits LMm, RMC l'angle commun LMR, les restes RMm, LMC seront égaux, & de plus ils sont réctangles en R & L. On prouvera de même que les triangles réctangles MSm & MKD, MOm & MIE sont semblables. Partant, puisque l'hypothenuse Mm est commune aux petits triangles MRm, MSm, MOm, & que les

hypothenuſes *MC*, *MD*, *ME* des triangles *MLC*, *MKD*, *MIE* ſont égales entr'elles ; il s'enſuit que les perpendiculaires *CL*, *DK*, *EI* ont le même rapport entr'elles que les différences *Rm*, *Sm*, *Om*.

2°. Que les lignes, qui partent des foyers ſitués du même côté de la perpendiculaire *MP*, croiſſent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. *FM* croiſt de ſa différence *Rm*, pendant que les autres *GM*, *HM* diminuent des leurs *Sm*, *Om*.

Si l'on ſuppoſe à préſent, pour fixer ſes idees, que l'équation qui exprime la relation des droites *FM* (x), *GM* (y), *HM* (z), ſoit $ax + xy - zz = o$, dont la différence eſt $adx + ydx + xdy - 2zdz = o$; Il eſt évident que la la tangente en *M* (qui n'eſt autre choſe que la continua-
* Art. 3. tion du petit côté *Mm* du poligone que l'on conçoit * compoſer la courbe *AMB*) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ſes points quelconques *m* des paralleles *mR*, *mS*, *mO* aux droites *FM*, *GM*, *HM*, terminees en *R*, *S*, *O* par des perpendiculaires *MR*, *MS*, *MO* à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $\overline{a + y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = o$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de *Rm*, *Sm*, *Om* leurs proportionnelles *CL*, *DK*, *EI*) que la perpendiculaire *MP* à la courbe doit être placée en ſorte que $a + y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$. Ce qui donne cette conſtruction.

Fig. 18. 19. Que l'on conçoive que le point *C* ſoit chargé du poids $a + y$ qui multiplie la différence dx de la droite *FM* ſur laquelle il eſt ſitué, & de même le point *D* du poids x, & le point *E* pris de l'autre côté de *M* par rapport au foyer *H* (parceque le terme $-2zdz$ eſt négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite *MP* qui paſſe par le commun centre de péſanteur des poids ſuppoſez en *C*, *D*, *E*, ſera la perpendiculaire requiſe. Car il eſt clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui paſſe par le centre de peſanteur de pluſieurs poids, les ſépare en ſorte que les poids d'une part multipliés chacun par ſa diſtance de cette droite, ſont préciſément égaux aux poids

de l'autre part multipliés aussi chacun par sa distance de cette même droite. Donc posant le cas que x croissant, y & z croissent aussi, c'est à dire que les foyers F, G, H tombent du même côté de MP, comme l'on suppose toujours en prenant la différence de l'équation donnée selon les regles prescrites; il s'ensuit que la ligne MP laissera d'une part les poids en C & D, & de l'autre le poids en E, & qu'ainsi l'on aura $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$, qui étoit l'équation à construire. Fig. 19.

Or je dis maintenant que puisque la construction est bonne dans ce cas, elle le sera aussi dans tous les autres; car supposant par éxemple que le point M change de situation dans la courbe en sorte que x croissant, y & z diminuent, c'est à dire que les foyers G, H passent de l'autre côté de MP, il s'ensuit 1°. * Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les signes des termes affectés par dy, dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI; de sorte que l'équation à construire sera dans ce nouveau cas $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$. 2°. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP, & qu'ainsi l'on aura par la proprieté du centre de pesanteur $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$, qui est l'équation à construire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas possibles, il s'ensuit, &c. Fig. 18. * *Art.* 8.

Il est évident que le même raisonnement subsistera toujours tel que soit le nombre des foyers, & telle que puisse être l'équation donnée; de sorte que l'on peut énoncer ainsi la construction générale.

Soit prise la différence de l'équation donnée dont je suppose que l'un des membres soit zero, & soit décrit à discrétion du centre M un cercle CDE qui coupe les droites MF, MG, MH aux points C, D, E, dans lesquels soient conçus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes sur lesquelles ils sont situés. Je dis que la ligne MP qui passe par leur commun centre de pesanteur, sera la perpendiculaire requise. Il est à remarquer que si l'un des

poids eſt négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point *M* par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers *F*, *G*, *H* ſoient des lignes droites ou courbes ſur qui les droites *MF*, *MG*, *MH* tombent à angles droits, la même conſtruction aura toujours lieu. Car menant du point *m* pris infiniment près de *M* les perpendiculaires *mf*, *mg*, *mh* ſur les foyers, & du point *M* les petites perpendiculaires *MR*, *MS*, *MO* ſur ces lignes ; il eſt clair que *Rm* ſera la difference de *MF*, puiſque les droites *MF*, *Rf* étant perpendiculaires entre les paralleles *Ff*, *MR*, elles ſeront egales, & de même que *Sm* eſt la difference de *MG*, & *Om* celle de *MH* ; & on prouvera enſuite tout le reſte comme ci-deſſus.

FIG. 20.

FIG. 21. On peut encore concevoir que les foyers *F*, *G*, *H* ſoient tous ou en partie des lignes courbes qui ayent des commencemens fixes & invariables aux points *F*, *G*, *H*, & que la ligne courbe *AMB* ſoit telle qu'ayant mené par éxemple d'un de ſes points quelconques *M* les tangentes *MV*, *MX* & la droite *MG* ; la relation des lignes mixtilignes *FVM*, *HXM* & de la droite *GM* ſoit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point *m* pris infiniment près de *M* la tangente *mu*, il eſt clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point *V* (puiſqu'elle n'eſt que la continuation du petit arc *Vu* conſidéré comme une petite droite), & partant que ſi l'on décrit du centre *V* le petit arc de cercle *MR* ; *Rm* ſera la différence de la ligne mixtiligne *FVM* qui devient *FVuRm*. Et tout le reſte ſe démontrera comme ci-devant.

M. Tſchirnhaus *a donné la premiere idée de ce Problême dans ſon Livre de la Medecine de l'eſprit ; M.* Fatio *en a trouvé enſuite une ſolution très ingénieuſe qu'il a fait inſérer dans les Journaux d'Hollande : mais la maniere dont ils l'ont conçu, n'eſt qu'un cas particulier de la conſtruction générale que je viens de donner.*

EXEMPLE I.

33. SOIT $axx + byy + czz - f^3 = o$ (les droites a, b, c, f sont données) dont la difference est $axdx + bydy + czdz = o$. C'est pourquoi concevant en *C* le poids ax, en *D* le poids by, & en *E* le poids cz, c'est à dire des poids qui soient entr'eux comme ces réctangles; la ligne *MP* qui passe par leur commun centre de pesanteur, sera perpendiculaire à la courbe au point *M*. FIG. 22.

Mais si l'on mene *FO* parallele à *CL*, & que l'on prenne le rayon *MC* pour l'unité, les triangles semblables *MCL*, *MFO* donneront $FO = x \times CL$; & de même menant *GR* parallele à *DK*, & *HS* parallele à *EI*, on trouvera que $GR = y \times DK$ & $HS = z \times EI$: de sorte qu'en imaginant aux foyers *F*, *G*, *H* les poids a, b, c; la ligne *MP*, qui passe par le centre de pesanteur des poids ax, by, cz supposez en *C*, *D*, *E*, passera aussi par le centre de pesanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre est un point fixe, puisque les poids en *F*, *G*, *H*, sçavoir a, b, c, sont des droites constantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que se trouve le point *M*. D'où il suit que la courbe *AMB* doit être telle que toutes ses perpendiculaires se coupent dans le même point, c'est à dire qu'elle sera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une proprieté très remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainsi.

S'il y a sur un même plan autant de poids a, b, c, &c. que l'on voudra, situés en *F*, *G*, *H*, &c. & que l'on décrive de leur commun centre de pesanteur un cercle *AMB*; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, les droites *MF*, *MG*, *MH*, &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, sera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. SOIT la courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* au foyer *F* qui est un point FIG. 23.

fixe la droite MF, & au foyer G qui eſt une ligne droite la perpendiculaire MG; le rapport de MF à MG ſoit toujours le même que de la donnée a à la donnée b.

Ayant nommé FM, x; MG, y; on aura $x \,.\, y :: a \,.\, b$, & partant $ay = bx$ dont la difference eſt $ady - bdx = 0$. C'eſt pourquoi concevant en C pris au delà de M par rapport à F le poids b, & en D (à pareille diſtance de M) le poids a, & menant par leur centre commun de peſanteur la ligne MP; elle ſera la perpendiculaire requiſe.

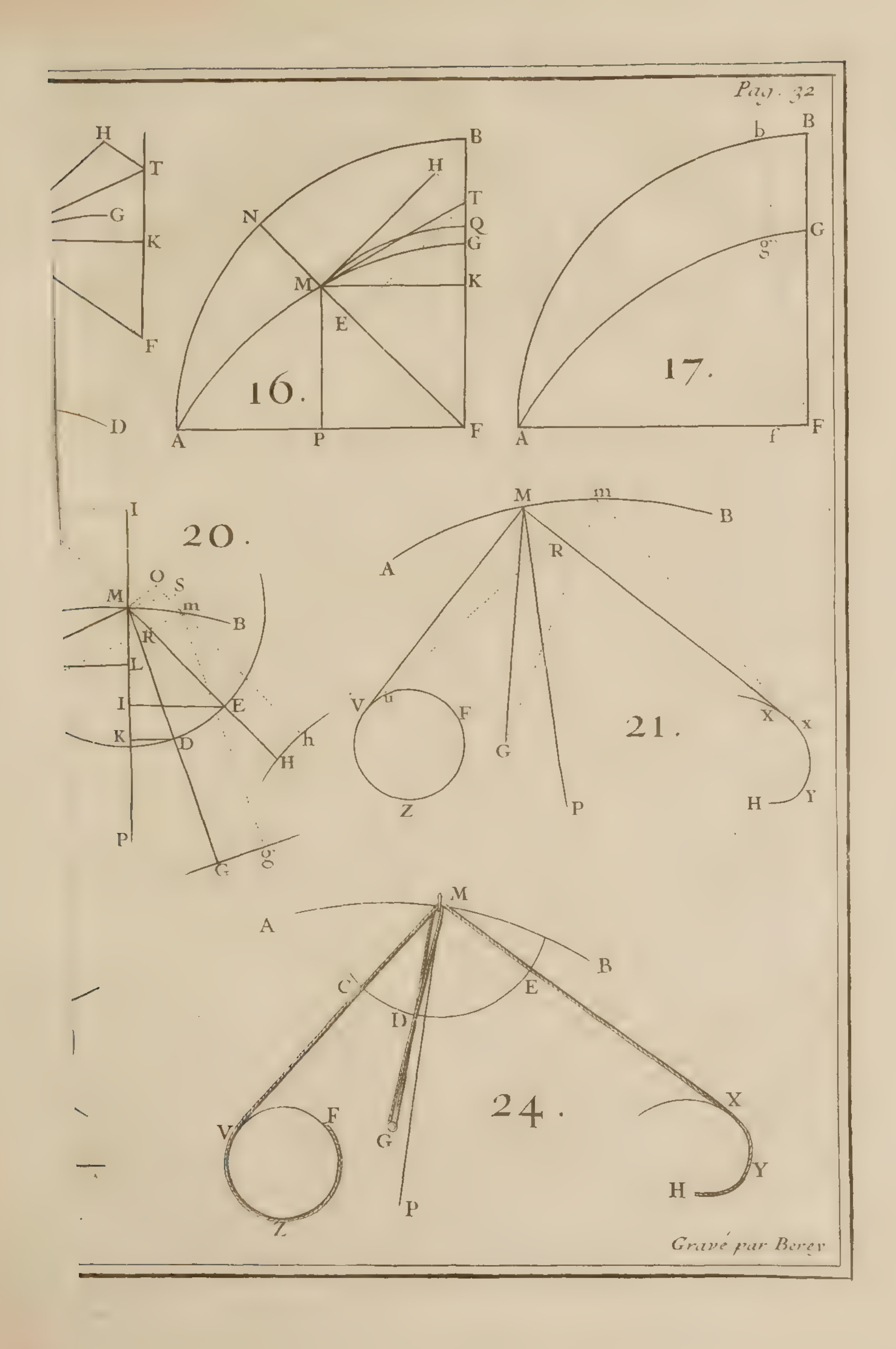
Il eſt clair par le principe de la balance, que ſi l'on diviſe la corde CD au point P en ſorte que $CP \,.\, DP :: a \,.\, b$; le point P ſera le centre commun de peſanteur des poids ſupposés en C & D.

La courbe AMB eſt une ſection conique, ſçavoir une Parabole lorſque $a = b$, une Hyperbole lorſque a ſurpaſſe b, & enfin une Ellipſe lorſqu'il eſt moindre.

EXEMPLE III.

Fig. 24. 35. Si après avoir attaché les extrémités d'un fil $FZVMGMXYH$ en F & en H, & avoir fiché une petite pointe en G, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un ſtile placé en M, en ſorte que les parties FZV, HYX ſoient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H, que la partie MG ſoit double, c'eſt à dire qu'elle ſoit repliée en G, & que les choſes demeurant en cet état l'on faſſe mouvoir le ſtyle M; il eſt clair qu'il décrira une courbe AMB. Il eſt queſtion de mener d'un point donné M ſur cette courbe la perpendiculaire MP, la poſition du fil qui ſert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil ſont toujours tangentes en V & X, & que ſi l'on nomme les lignes mixtilignes $FZVM, x$; $HYXM, z$; la droite MG, y; & une ligne droite priſe égale à la longueur du fil, a; l'on aura toujours $x + 2y + z = a$: d'où je connois que la courbe AMB eſt compriſe dans la conſtruction générale. C'eſt pourquoi prenant la différence $dx + 2dy + dz = 0$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids



H
T
G
K
F
D
B
H
T
N
Q
G
M
K
E
16.
A
P
F
b
B
G
g
17.
A
f
F
I
20.
O
S
M
m
B
R
L
I
E
K
D
h
H
P
G
g
M
m
B
R
A
V
u
F
G
21.
X
x
Z
P
H
Y
M
A
B
C
E
D
24.
X
V
F
G
Y
H
P
Z

poids *r*; je dis que la ligne *MP*, qui passe par le centre commun de pesanteur de ces poids, sera la perpendiculaire requise.

PROPOSITION XI.

Problême.

36. SOIENT *deux lignes quelconques* APB, EQF *dont l'on sçache mener les tangentes* PG, QH; *& soit une ligne droite* PQ *sur laquelle soit marqué un point* M. *Si l'on conçoit que les extrémités* P, Q *de cette droite glissent le long des lignes* AB, EF, *il est clair que le point* M *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CD. *Il est question de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT. FIG. 25.

Ayant imaginé que la droite mobile *PMQ* soit parvenue dans la situation infiniment proche *pmq*, on tirera les petites droites *PO*, *MR*, *QS* perpendiculaires sur *PQ*, ce qui formera les petits angles rectangles *pOP*, *mRM*, *qSQ*; & ayant pris *PK* égale à *MQ*, on menera la droite *HKG* perpendiculaire sur *PQ*, & l'on prolongera *OP* en *T*, où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée *MT*. Cela posé, il est clair que les petites droites *Op*, *Rm*, *Sq* seront égales entr'elles, puisque par la construction *PM* & *MQ* sont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues *PM* ou *KQ*, *a*; *MQ* ou *PK*, *b*; *KG*, *f*; *KH*, *g*; & la petite droite *Op* ou *Rm* ou *Sq*, *dy*; les triangles semblables *PKG* & *pOP*, *QKH* & *qSQ* donneront $PK(b) . KG(f) :: pO(dy) . OP = \frac{fdy}{b}$. Et $QK(a) . KH(g) :: qS(dy) . SQ = \frac{gdy}{a}$. Or l'on sçait par la Geometrie commune que $MR = \frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a+b}$. Ainsi les triangles semblables *mRM*, *MPT* donneront $mR(dy) . RM\left(\frac{fdy+gdy}{a+b}\right) :: MP(a) . PT = \frac{af+ag}{a+b}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XII.

Problême.

Fig. 26. 37. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ *qui ayent pour axes les droites* BC, ED *qui s'entre-coupent à angles droits au point* A; *& soit une ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *les droites* MGQ, MPN *parallele à* AB, AE; *la relation des espaces* EGQF, (*le point E est un point fixe donné sur la droite* AE, *& la ligne* EF *est parallele à* AC) APND, *& les droites* AP, PM, PN, GQ, *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de mener d'un point donné* M *sur la courbe* LM, *la tangente* MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x; PM ou AG, y; PN, u; GQ, z; l'espace $EGQF$, s; l'espace $APND$, t; & les soutangentes donnees PH, a; GK, b; l'on aura Pp ou NS ou $MR = dx$, Gg ou Rm ou $OQ = -dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$ à cause des triangles semblables HPN; NSn; $Oq = dz = -\frac{zdy}{b}$, $NPpn = dt = udx$, & $QGgq = ds = -zdy$; où l'on doit observer que les valeurs de Rm & Sn sont négatives, parceque AP (x) croissant, PM (y) & PN (u) diminuent. Cela posé, on prendra la difference de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt, ds, du, dz leurs valeurs udx, $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx, ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. SOIT $s + zz = t + ux$, on aura en prenant les differences $ds + 2zdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds, dt, dz, du leurs valeurs, on trouvera $-zdy - \frac{2zzdy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aybz}{bux - 2abu}$.

EXEMPLE II.

39. SOIT $s = t$, donc $ds = dt$, c'est à dire $- zdy = udx$; & partant $PT \left(\frac{ydx}{dy}\right) = -\frac{yz}{u}$. Or comme cette quantité est négative, il s'ensuit * que l'on doit prendre le point *T* du côté opposé au point *A* origine des *x*. Si l'on suppose que la ligne *FQ* soit une hyperbole qui ait pour asymptotes les droites *AC*, *AE*, en sorte que *GQ* $(z) = \frac{cc}{y}$, & que la ligne *BND* soit une droite parallele à *AB*, de maniere que *PN* (u) soit par tout égale à la droite donnée c; il est clair que la courbe *LM* a pour asymptote la droite *AB*, & que sa soutangente *PT* $\left(-\frac{yz}{u}\right) = -c$: c'est à dire qu'elle demeure par tout la même. * *Art.* 10.

La courbe *LM* est appellée dans ce cas *Logarithmique.*

PROPOSITION XIII.

Problême.

26. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ *qui ayent pour axe la même droite* BA, *sur laquelle soient marqués deux points fixes* A, E; *soit une troisiéme ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques* M *la droite* AN, *décrit du centre* A *l'arc de cercle* MG, *& tiré* GQ *parallele à* EF *perpendiculaire sur* AB; *la relation des espaces* EGQF (s), ANB (t), *& des droites* AM *ou* AG (y), AN (z), GQ (u), *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné* M *sur la courbe* LM *la tangente* MT. FIG. 27.

Après avoir mené la droite *ATH* perpendiculaire sur *AMN*, soit imaginé une autre droite *Amn* infiniment proche de *AMN*, un autre arc *mg*, une autre perpendiculaire *gq*, & décrit du centre *A* le petit arc *NS*: on nommera les soutangentes données *AH*, a; *GK*, b; & on aura *Rm* ou *Gg* $= dy$, *Sn* $= dz$; les triangles semblables *HAN* & *NSn*, *KGQ*

& QOq, donneront aussi $SN = \frac{adz}{z}$, $Oq = -du = \frac{udy}{b}$, $GQqg = -ds = udy$, ANn ou $AN \times \frac{1}{2} NS = -dt = \frac{1}{2} adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la difference de l'equation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera une valeur de dz en dy. Or à cause des sécteurs & des triangles semblables ANS & AMR, mRM & MAT, on trouve $AN (z) . AM (y) :: NS (\frac{adz}{z}) . MR = \frac{aydz}{zz}$. Et $mR (dy) . RM (\frac{aydz}{zz}) :: AM (y) . AT = \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz sa valeur en dy, les différences se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée AT sera exprimée en termes entiérement connus. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

41. SOIT $uy - s = zz - t$, dont la différence est $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la substitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve $AT = \frac{4abuyy - 2auy^3}{4bz^3 + abzz}$.

EXEMPLE II.

42. SOIT $s = 2t$, donc $ds = 2dt$, c'est à dire $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant $AT \left(\frac{ayydz}{zzdy}\right) = \frac{uyy}{zz}$.

Si la ligne BN est un cercle qui ait pour centre le point A, & pour rayon la droite $AB = AN = c$, & que FQ soit une hyperbole telle que $GQ (u) = \frac{ff}{y}$; il est clair que la courbe LM fait une infinité de retours au tour du centre A avant que d'y parvenir (puisque l'espace $FEGQ$ devient infini lorsque le point G tombe en A), & que $AT = \frac{ffy}{cc}$. D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; & partant que l'angle AMT est par tout le même.

La courbe LM est appellée en ce cas *Logarithmique spirale*.

PROPOSITION XIV.

Problême.

43. SOIENT *ſur un même plan deux courbes quelconques* AMD, BMC *qui ſe touchent en un point* M, *& ſoit ſur le plan de la courbe* BMC *un point fixe* L. *Si l'on conçoit à preſent que la courbe* BMC *roule ſur la courbe* AMD *en s'y appliquant continuellement en ſorte que les parties révolues* AM, BM *ſoient toujours égales entr'elles; il eſt viſible que le plan* BMC *emportant le point* L, *ce point décrira dans ce mouvement une eſpece de roulette* ILK. *Cela poſé, je dis que ſi l'on mene dans chaque différente poſition de la courbe* BMC *(du point décrivant* L *au point touchant* M*) la droite* LM; *elle ſera perpendiculaire à la courbe* ILK. FIG. 28.

Car imaginant ſur les deux courbes *AMD*, *BMC* deux parties *Mm*, *Mm* égales entr'elles & infiniment petites, on les pourra conſidérer *comme deux petites droites qui font au point *M* un angle infiniment petit. Or afin que le petit côté *Mm* de la courbe ou poligone *BMC* tombe ſur le petit côté *Mm* du poligone *AMD*, il faut que le point *L* décrive autour du point touchant *M* comme centre un petit arc *Ll*. Il eſt donc évident que ce petit arc ſera partie de la courbe *ILK*; & par conſéquent que la droite *ML*, qui lui eſt perpendiculaire, ſera auſſi perpendiculaire ſur la courbe *ILK* au point *L*. Ce qu'il falloit prouver. * *Art.* 3.

PROPOSITION XV.

Problême.

44. SOIT *un angle réctiligne quelconque* MLN, *dont les côtés* LM, LN *touchent deux courbes quelconques* AM, BN. *Si l'on fait gliſſer ces côtés autour de ces courbes, en ſorte qu'ils les touchent continuellement; il eſt clair que le ſommet* L *décrira dans ce mouvement une courbe* ILK. *Il eſt queſtion de mener une perpendiculaire* LC *ſur cette courbe, la poſition de l'angle* MLN *etant donnée.* FIG. 29.

Soit décrit un cercle qui passe par le sommet L, & par les points touchans M, N; soit menee par le centre C de ce cercle la droite CL: je dis qu'elle sera perpendiculaire à la courbe ILK.

Car considérant les courbes AM, BN comme des poligones d'une infinité de côtés tels que Mm, Nn; il est évident que si l'on fait glisser les côtés LM, LN, de l'angle rectiligne MLN, qu'on suppose demeurer toujours le même, autour des points fixes M, N, (on considere les tangentes LM, LN comme la continuation des petits cotés Mf, Ng) jusqu'à ce que le côté LM de l'angle tombe sur le petit côté Mm du poligone AM, & l'autre coté LN sur le petit côté Nn du poligone BN; le sommet L décrira une petite partie Ll de l'arc de cercle MLN, puisque par la construction cet arc est capable de l'angle donné MLN. Cette petite partie Ll sera donc commune à la courbe ILK; & par consequent la droite CL, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur cette courbe au point L. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

Problême.

FIG. 30. 45. SOIT ABCD *une corde parfaitement fléxible à laquelle soient attachés différens poids* A, B, C, *&c. qui ayent entr'eux tels intervales* AB, BC, *&c. que l'on voudra. Si l'on traîne cette corde sur un plan horizontal par l'extrémité* D, *le long d'une courbe donnée* DP; *il est clair que ces poids se disposeront en sorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes* AM, BN, CO, *&c. On demande la maniére d'en tirer les tangentes, la position de la corde* ABCD *étant donnée avec la grandeur des poids.*

Dans le premier instant que l'extrémité D avance vers P, les poids A, B, C, décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés Aa, Bb, Cc des poligones qui composent les courbes AM, BN, CO; & par conséquent il ne faut pour en mener les tangentes AB, BG, CK, que déterminer la

direction des poids *A*, *B*, *C* dans ce premier instant, c'est à dire la position des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids *A* est tiré dans ce premier instant suivant la direction *AB*, & comme il n'y a aucun obstacle qui s'oppose à cette direction, puisqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit suivre ; & partant la droite *AB* sera la tangente en *A* de la courbe *AM*.

2°. Que le poids *B* est tiré suivant la direction *BC*; mais parcequ'il traîne après lui le poids *A* qui n'est pas dans cette direction, & qui doit par consequent y apporter quelque changement, le poids *B* n'aura pas sa direction suivant *BC*, mais suivant une autre droite *BG*, dont il faut trouver la position. Ce que je fais ainsi.

Je décris sur *BC* comme diagonale le réctangle *EF*, dont le côté *BF* est sur *AB* prolongée, & supposant que la force avec laquelle le poids *B* est tiré suivant *BC*, s'exprime par *BC*; il est visible par les regles de la Mécanique, que cette force *BC* se peut partager en deux autres *BE* & *BF*, c'est à dire que le poids *B* étant tiré suivant la direction *BC* par la force *BC*, c'est la même chose que s'il étoit tiré en même temps par la force *BE* suivant la direction *BE*, & par la force *BF* suivant la direction *BF*. Or le poids *A* ne s'oppose point à la direction *BE*, puisqu'elle lui est perpendiculaire ; & par conséquent la force *BE* suivant cette direction demeure toute entiere : mais il s'oppose avec toute sa pesanteur à la direction *BF*. Afin donc que le poids *B* avec la force *BF* vainque la résistance du poids *A*, il faut que cette force se distribue dans ces poids à proportion de leurs masses ou grandeurs : c'est pourquoi si l'on divise *EC* au point *G*, en sorte que *CG* soit à *GE* comme le poids *A* au poids *B* ; il est clair que *EG* exprimera la force restante avec laquelle le poids *B* tend à se mouvoir suivant la direction *BF*, après avoir vaincu la résistance du poids *A*. Il est donc évident que le poids *B* est tiré en même temps par la force *BE* suivant la direction *BE*, & par la force *EG* suivant la direction

BF ou *EC*; & partant qu'il tendra à aller par *BG* avec la force *BG*: c'eſt à dire que *BG* ſera ſa direction, & par conſéquent tangente en *B* de la courbe *BN*.

3°. Pour avoir la tangente *CK*, je forme ſur *CD* comme diagonale le réctangle *HI*, dont le côté *CI* eſt ſur *BC* prolongée; & je vois que le poids *B* ne réſiſte point à la force *CH* avec laquelle le poids *C* eſt tiré ſuivant la direction *CH*, mais bien à la force *CI* avec laquelle il eſt tiré ſuivant la direction *CI*, & de plus que le poids *A* réſiſte auſſi à cette force. Pour ſçavoir de combien, je tire *AL* perpendiculaire ſur *CB* prolongée du côté de *B*, & je remarque que ſi *AB* exprime la force avec laquelle le poids *A* eſt tiré ſuivant la direction *AB*, *BL* exprimera celle avec laquelle ce même poids *A* eſt tiré ſuivant la direction *BC*; de ſorte que le poids *C* avec la force *CI* doit vaincre le poids entier *B*, & de plus une partie du poids *A* qui eſt à ce poids *A* comme *BL* eſt à *BA*, ou *BF* à *BC*. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC} . C :: DK . KH$, il eſt clair que *CK* ſera la direction du poids *C*, & par conſéquent la tangente en *C* de la troiſiéme courbe *CO*.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même maniére la tangente de la quatriéme, cinquiéme, &c. Et ſi l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art. 36.



SECTION

SECTION III.

Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe *MDM* dont les appliquées *PM*, *ED*, *PM* soient paralleles entr'elles; & qui soit telle que la coupée *AP* croissant continuellement, l'appliquée *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle croisse. Cela posé, FIG. 31. 32. 33. 34.

La ligne *ED* sera nommée *la plus grande* ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que *PM*, qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que *AP*, laquelle *AP* croissant continuellement, cette quantité *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour *AP*, une valeur *AE* telle que la quantité *ED* qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité *PM* semblablement formée de *AP*. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis.*

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. LA *nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED *soit la plus grande ou la moindre de ses semblables* PM.

Lorsque *AP* croissant, *PM* croît aussi; il est évident* que sa difference *Rm* sera positive par rapport à celle de *AP*; & qu'au contraire lorsque *PM* diminue, la coupee *AP* crois- * *Art.* 8. 10.

ſant toujours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zero; ſçavoir par le zero lorſqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la difference d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe *MDM* étant donnée, on trouvera * une valeur de *Rm*, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de *AE* dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

*Sect. 1. ou 2.

REMARQUE.

Fig. 31. 32. 47. LA tangente en *D* eſt parallele à l'axe *AB* lorſque la difference *Rm* devient nulle dans ce point; mais lorſqu'elle devient infinie, la tangente ſe confond avec l'appliquée *ED*. D'où l'on voit que la raiſon de *mR* à *RM*, qui exprime celle de l'appliquée à la ſoutangente, eſt nulle ou infinie ſous le point *D*.

Fig. 33. 34.

On conçoit aiſément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative ſans paſſer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorſqu'elle augmente, elle doive paſſer par l'infini. C'eſt pourquoi pour aider l'imagination, ſoient entendues des tangentes aux points *M*, *D*, *M*; il eſt clair dans les courbes où la tangente en *D* eſt parallele à l'axe *AB*, que la ſoutangente *PT* augmente continuellement à meſure que les points *M*, *P* approchent des points *D*, *E*; & que le point *M* tombant en *D*, elle devient infinie; & qu'enfin lorſque *AP* ſurpaſſe *AE*, la ſoutangente *PT* devient * négative de poſitive qu'elle étoit, ou au contraire.

Fig. 31. 32.

* Art. 10.

EXEMPLE I.

Fig. 35. 48. SUPPOSONS que $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) exprime la nature de la courbe *MDM*. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$,

& $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = o$ lorſque le point P tombe ſur le point cherchée E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes les ſemblables PM.

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero; mais parceque cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = o$; d'où l'on tire $x = a$, qui eſt la valeur cherchée de AE. FIG. 33.

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonference ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. FIG. 36.

Ayant mené à diſcretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a; BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB\,(a) \,.\, BF\,(b) :: AN\,(u) \,.\, NM = \frac{bu}{a}$. Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & ſa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorſque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles réctangles NSn, NPC ſont ſemblables; car ſi l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les reſtes SNn, PNC ſeront égaux. Et partant $CN\,(c) \,.\, CP$

$(c - x) :: Nn (du) . Sn (dz) = \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui eſt en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il eſt donc évident que ſi l'on prend CE du côté de B quatriéme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la baſe BF, & au rayon CB, le point E ſera celui qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

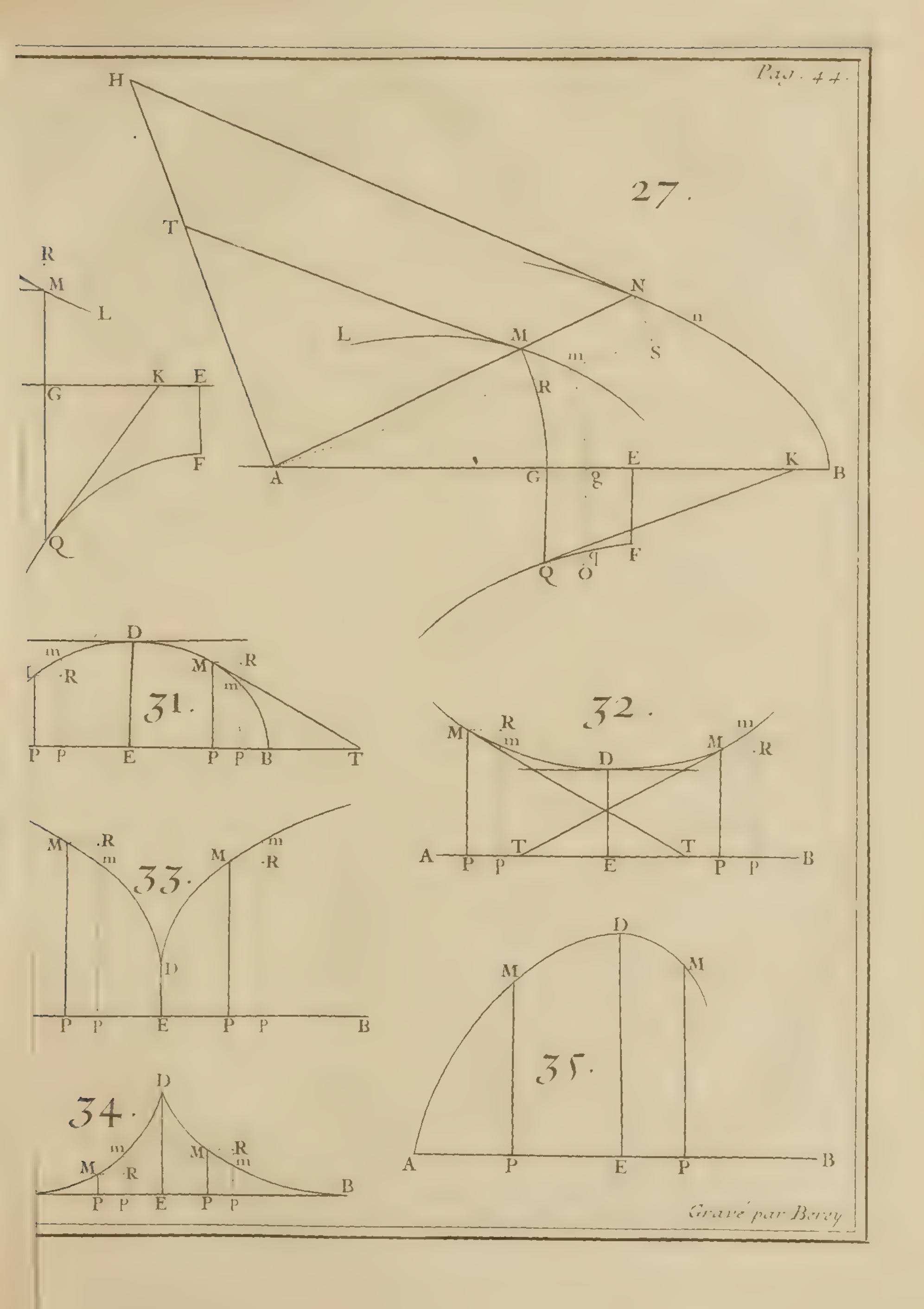
Fig. 35. 51. COUPER la ligne donnée AB en un point E, en ſorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, ſoit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

Ayant nommé l'inconnue AE, x ; & la donnée AB, a ; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED ſoit la plus grande de toutes ſes ſemblables PM ; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a - x}^n$ ſoit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit ſoit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a - x}^n - n\overline{a - x}^{n-1} dx \times x^m = o$, d'où en diviſant par $x^{m-1} \times \overline{a - x}^{n-1} dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & AE $(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le Problême ainſi.

Fig. 37. Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E, en ſorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ ſoit *un moindre*, & non pas un *plus grand* ; car l'équation à la courbe MDM ſera


27.
H
T
N
n
L
M
m
S
R
A
G
g
E
K
B
Q
O
F
R
M
L
K
E
G
F
Q
D
m
M
R
R
m
31.
P
P
E
P
P
B
T
32.
M
R
m
m
M
R
D
A
T
T
P
P
E
P
P
B
M
R
m
M
R
m
33.
D
P
P
E
P
P
B
D
34.
m
M
R
M
R
m
P
P
E
P
P
B
D
M
M
35.
A
P
E
P
B

$\frac{ax}{x-a} = y$, dans laquelle si l'on suppose $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC sera $\frac{aa}{o}$, c'est à dire infinie ; & supposant x infinie, l'on aura $y = x$, c'est à dire que l'appliquée sera aussi infinie.

Si $m = 1$, & $n = -2$, l'on aura $AE = -a$; d'où il suit que l'on doit énoncer le Problême alors en cette sorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E, en sorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ soit plus grande que toute autre quantité semblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. Fig. 38.

EXEMPLE V.

52. La ligne droite AB étant divisée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper sa partie du milieu CF au point E, en sorte que le rapport du réctangle $AE \times EB$ au réctangle $CE \times EF$ soit moindre que tout autre rapport formé de la même maniére. Fig. 39.

Ayant nommé les données AC, a ; CF, b ; CB, c ; & l'inconnue CE, x ; l'on aura $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ sera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi si l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) soit exprimée par l'équation $y = \frac{acc + acx - aax - axx}{bx - xx}$, la question se réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED soit la moindre de toutes ses semblables PM. On formera donc (en prenant les differences, & divisant ensuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, dont l'une des racines résout la question.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. Entre tous les Cones qui peuvent être inscrits

dans un sphére, déterminer celui qui a la plus grande surface convexe.

FIG. 40. La question se réduit à déterminer sur le diametre AB du demi-cercle AFB le point E, en sorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle $AF \times FE$ soit le plus grand de tous ses semblables $AN \times NP$. Car si l'on conçoit que le demi-cercle AFB fasse une révolution entiére autour du diametre AB, il est clair qu'il décrira une sphére, & que les triangles réctangles AEF, APN décriront des cones inscrits dans cette sphére, dont les surfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, seront entr'elles comme les réctangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnue $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la proprieté du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera un ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée AP (x) soit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, en sorte que l'appliquée ED soit plus grande que toutes ses semblables PM, on aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. ON demande entre tous les Parallélépipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtes la droite donnée b, celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre sera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipede, leur somme sçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ sera la moitié de sa superficie qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trou-

vera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = o$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de sorte que les trois côtés du parallélépipede qui satisfait à la question, seront le premier b, le second $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, & le troisiéme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, sont égaux entr'eux.

EXEMPLE VIII.

55. ON demande présentement entre tous les Parallélepipedes qui sont égaux à un cube donné a^3, celui qui a la moindre superficie. Fig. 41.

Nommant x un des côtés inconnus, il est clair par l'éxemple precédent, que les deux autres côtes seront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie, sera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3x}$ qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi sa différence $-\frac{a^3dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = o$, d'où l'on tire $x = a$; & par conséquent les deux autres côtes seront aussi chacun $= a$; de sorte que le cube même donne satisfait à la question.

EXEMPLE IX.

56. LA ligne AEB étant donnée de position sur un plan Fig. 41.
avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorsqu'elle est composée des droites CP, PF.

Supposons que les lignes CE, EF ayent la position requise; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM telle qu'ayant mené à discrétion PQM perpendiculaire sur CF, l'appliqué QM exprime la quantité donnée: il est clair

que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zero ou à l'infini : c'est pourquoi si la quantité donnée est par exemple $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = 0$, & par conséquent $du . - dz :: 2z . a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du ; c'est à dire que la position des droites CE, EF doit être telle que u croissant, z diminue.

Maintenant si l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ses points quelconques G les perpendiculaires GL, GI sur CE, EF ; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment près de E, les droites CKe, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH : on formera les triangles réctangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui seront semblables entr'eux ; car si l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les restes LEG, KEe seront égaux ; on prouvera de même que les angles IEG, HEe seront égaux. On aura donc $GL . GI :: Ke (du) . He (- dz) :: 2z . a$. D'où il suit que la position des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG sur la ligne AEB ; le sinus GL de l'angle GEC soit au sinus GI de l'angle GEF, commes les quantités qui multiplient dz sont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. Si l'on veut à présent que la droite CE soit donnée de position & de grandeur, que la droite EF le soit de grandeur seulement, & qu'il faille trouver sa position, il est clair que l'angle GEC étant donné, son sinus GL le sera aussi, & par conséquent le sinus GI de l'angle cherché GEF. Donc si l'on décrit un cercle du diametre EG, & que l'on porte la valeur de GI sur sa circonférence de G en I ; la droite EF qui passe par le point I aura la position requise.

Soit $au + bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne

ne à EC & à EF, la position de cette derniere sera toujours la même, puisqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par consequent ne change point. Si $a = b$, il est clair que la position de EF doit être sur CE prolongée du côté de E; puisque $GL = GI$, lorsque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB: mais lorsqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG. FIG. 42.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle; trouver sur sa circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible. FIG. 42.

Supposant que le point E soit celui que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG, il est clair qu'elle sera perpendiculaire sur la circonférence AEB; & partant *que les angles FEG, CEG seront égaux entr'eux. Si donc l'on mene EH en sorte que l'angle EHO soit égal à l'angle CEO, & de même EK en sorte que l'angle EKO soit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC; on formera les triangles semblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a; OC, b; OF, c; & les inconnues OD ou LE, x; DE ou OL, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$, & HD $(x - \frac{aa}{b})$. DE (y) :: KL $(y - \frac{aa}{c})$. LE (x). Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui est une équation à une hyperbole que l'on construira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E. *Art. 57.

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le tems c, & dans l'autre du FIG. 43.

côté de F l'espace b dans le même tems c : on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F. Si l'on fait $a . CE (u) :: c . \frac{cu}{a}$. Et $b . EF$ $(z) :: c . \frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il employe à parcourir EF ; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{c}$ doit être un *moindre*. D'où il suit

* Art. 56. * qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB ; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI ; l'on aura $a . b :: GL . GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parceque les triangles réctangles GEL & ECA, GEI & EHD sont egaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue AE, x ; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connues AB, f ; AC, g ; BF, h ; les triangles semblables EBF, EDH donneront $EB (f - x) . BF (h) :: ED \left(\frac{bx}{a}\right)$. $DH = \frac{bhx}{af - ax}$. Mais à cause des triangles réctangles EDH, EAC, qui ont leurs hypotenuses EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est à dire en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$: De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{lllll} aax^4 & - 2aafx^3 & + aaffxx & - 2aafggx & + aaffgg = 0. \\ - bb & + 2bbf & + aagg & & \\ & & - bbff & & \\ & & - bbhh & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniére qui suit, sans avoir recours à l'éxemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f; AC, g; BF, b; & l'inconnue AE, x; on fera $a \,.\, CE\ (\sqrt{gg + xx}) :: c \,.\, \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE. Et de même $b \,.\, EF\ (\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}) :: c \,.\, \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}}{b}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}}{b}$ = à un *moindre*; & partant sa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx - cfdx}{b\sqrt{ff - 2fx + xx + bb}} = o$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, en sorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb D descendra le plus bas qu'il lui sera possible, au dessous de l'horizontale CB; d'où il suit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant les données CF, a; DFB, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ qui doit être un *plus grand*; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = o$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, &

divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniére que voici.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant si du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entr'elles; & par consequent les petits triangles réctangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypotenuse Ff commune, seront égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est à dire que le point F doit être tellement situé dans la circonference FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux,

Cela posé, si l'on mene FH, en sorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD; les triangles CBF, CFH seront semblables; comme aussi les triangles réctangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par conséquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE\ (x - \frac{aa}{c})$. $EF\ (y) :: EF\ (y)\ .\ EC\ (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

Fig. 45. 61. L'ÉLÉVATION du pole étant donnée; trouver le jour du plus petit crépuscule.

Soit C le centre de la sphére; $APTOBHQ$ le meridien; $HDdO$ l'horison; $QEeT$ le cercle crépusculaire parallele

à l'horiſon ; $AMNB$ l'équateur ; $FEDG$ la portion du parallele à l'équateur, que decrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horiſon & du cercle crépuſculaire ; P le pole auſtral, PEM, PDN des quarts de cercles de déclinaiſon. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horiſon & le cercle crépuſculaire, & l'arc OP de l'élevation du pole ſont donnes ; & par conſéquent leurs ſinus droits CI ou FL ou QX, & OV. L'on cherche le ſinus CK de l'arc EM ou DN de la declinaiſon du Soleil lorſqu'il décrit le parallele ED.

S'imaginant une autre portion $fedg$ d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de $FEDG$, avec les quarts de cercles Pem, Pdn; il eſt clair que le temps que le Soleil employe à parcourir l'arc ED, devant être un *moindre*, la différence de l'arc MN qui en eſt la meſure, & qui devient mn lorſque ED devient ed, doit être nulle ; d'où il ſuit que les petits arcs Mm, Nn, & par conſéquent les petits arcs Re, Sd, ſeront égaux entr'eux Or les arcs RE, SD étant renfermés entre les mêmes paralleles ED, ed, ſont auſſi égaux, & les angles en S & en R ſont droits. Donc les petits triangles réctangles ERe, DSd (que l'on conſidere comme réctilignes * à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés), ſeront égaux & ſemblables ; & par conſéquent les hypotenuſes Ee, Dd ſeront auſſi égales entr'elles. * *Art.* 3.

Cela poſé, les droites DG, EF, dg, ef communes ſections des plans $FEDG$, $fedg$ paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diametres HO, QT, puiſque les plans de tous ces cercles ſont perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien ; & les petites droites Gg, Ff ſeront égales entr'elles, puiſque les droites FG, fg ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera

à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cauſe des cercles *HDO*, *QET*) *CO*. *CG* :: *Dd* ou *Ee*. *DG* — *dg* ou *fe* — *FE* :: *IQ*. *IF* :: *CO* + *IQ* ou *OX*. *CG* + *IF* ou *GL*. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables *CVO*, *CKG*, *FLG*, l'on aura *CO*. *CG* :: *OV*. *GK*. Et *GK*. *GL* :: *CK*. *FL* ou *QX*. Donc *OV*. *CK* :: *OX*. *XQ* :: *XQ*. *XH* par la proprieté du cercle : c'eſt à dire que ſi l'on prend *QX* pour le rayon ou ſinus total dans le triangle rectangle *QXH*, dont l'angle *HQX* eſt de 9 degres, parceque les Aſtronomes font l'arc *HQ* de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'elevation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le temps du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élevation du pole; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.



SECTION IV.

Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement.

COMME l'on se servira dans la suite des différences secondes, troisiémes, &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appellee la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien sa *différence seconde.* Ainsi si l'on imagine une troisiéme appliquée *nq* infiniment proche de la seconde *mp*, Fig. 46. & qu'on mene *mS* parallele à *AB*, & *mH* parallele à *RS*; on appellera *Hn* la *différence de la différence Rm*, ou bien la *différence seconde* de *PM.*

De même si l'on imagine une quatriéme appliquée *of* infiniment proche de la troisiéme *nq*, & qu'on mene *nT* parallele à *AB*, & *nL* parallele à *ST*; on appellera la différence des petites droites *Hn*, *Lo*, la *différence de la différence seconde*, ou bien la *différence troisiéme* de *PM*. Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de d *qui en exprime l'ordre ou le genre. Par éxemple, on marquera par* dd *la différence seconde ou du second genre; par* ddd, *la différence troisiéme ou du troisiéme genre; par* dddd, *la différence quatriéme ou du quatriéme genre, & de même des autres. Ainsi* ddy *exprimera* Hn; dddy, Lo — Hn *ou* Hn — Lo; *&c.*

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera par des chiffres postérieurs mis au dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entiéres. Par éxemple, le quarré, ou le cube de dy *sera* dy^2, *ou* dy^3; *le quarré, ou le cube de* ddy *sera* ddy^2, *ou*

ddy²; *celui de* dddy *sera* dddy², *ou* dddy³; *celui de* ddddy *sera* ddddy², *ou* ddddy³, *&c.*

COROLLAIRE I.

62. Si l'on nomme chacune des coupées *AP*, *Ap*, *Aq*, *Af*, *x*; chacune des appliquées *PM*, *pm*, *qn*, *fo*, *y*; & chacune des portions courbes *AM*, *Am*, *An*, *Ao*, *u*; il est clair que *dx* exprimera les differences *Pp*, *pq*, *qf* des coupées; *dy* les différences *Rm*, *Sn*, *To* des appliquées; & *du* les différences *Mm*, *mn*, *no* des portions de la courbe *AMD*. Or afin de prendre, par éxemple, la différence seconde *Hn* de la variable *PM*, il faut imaginer sur l'axe deux petites parties *Pp*, *pq*, & sur la courbe deux autres *Mm*, *mn* pour avoir les deux différences *Rm*, *Sn*; & partant si l'on suppose que les petites parties *Pp*, *pq* soient égales entr'elles; il est clair que *dx* sera constante par rapport à *dy* & à *du*, puisque *Pp* qui devient *pq* demeure la même pendant que *Rm* qui devient *Sn*, & *Mm* qui devient *mn*, varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe *Mm*, *mn* seroient égales entr'elles, & alors *du* seroit constante par rapport à *dx* & à *dy*; & enfin si l'on supposoit que *Rm* & *Sn* fussent égales, *dy* seroit constante par rapport à *dx* & à *du*, & sa différence *Hn (ddy)* seroit nulle.

De même pour prendre la différence troisiéme de *PM*, ou la différence de la difference seconde *Hn*, il faut imaginer sur l'axe trois petites parties *Pp*, *pq*, *qf*; sur la courbe trois autres *Mm*, *mn*, *no*; & sur les appliquées aussi trois autres *Rm*, *Sn*, *To*, & alors on aura *dx* ou *du* ou *dy* pour constante, selon qu'on supposera que les petites parties *Pp*, *pq*, *qf*, ou *Mm*, *mn*, *no*, ou *Rm*, *Sn*, *To* sont égales entr'elles. Il en est de même des différences quatriémes, cinquiémes, &c.

FIG. 47. Tout ceci se doit aussi entendre des courbes *AMD*, dont les appliquées *BM*, *Bm*, *Bn* partent toutes d'un point fixe *B*; car pour avoir, par éxemple, la différence seconde de *BM*, il faut imaginer deux autres appliquées *Bm*, *Bn* qui fassent des angles *MBm*, *mBn* infiniment petits, & ayant décrit du centre *B* les petits arcs de cercle *MR*, *mS*; la différence des

des petites droites Rm, Sn, ſera la différence ſeconde de BM; & l'on pourra prendre pour conſtants les petits arcs MR, mS, ou les petites portions de la courbe Mm, mn, ou enfin les petites droites Rm, Sn. Il en va de même pour les différences troiſiémes, quatriémes, &c. de l'appliquée BM.

REMARQUE.

63. On doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits : que Rm, par exemple, eſt infiniment petite par rapport à PM, & infiniment grande par rapport à Hn; de même que l'eſpace $MPpm$ eſt infiniment petit par rapport à l'eſpace APM, & infiniment grand par rapport au triangle MRm. Fig. 46.

2°. Que la difference entiére Pf eſt encore infiniment petite par rapport à AP; parceque toute quantité qui eſt la ſomme d'un nombre fini de quantites infiniment petites telles que Pp, pq, qf par rapport à une autre AP, demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inferieur qui la compoſe, ſoit infini.

COROLLAIRE II.

64. On peut marquer en cette ſorte les différences ſecondes dans toutes les ſuppoſitions poſſibles.

1°. Dans les courbes où les appliquées mR, nS ſont paralleles entr'elles, on prolongera la petite droite Mm en H où elle rencontre l'appliquée Sn; & ayant décrit du centre m, de l'intervalle mn, l'arc nk, on tirera les petites droites nl, li, kcg paralleles à mS & à Sn. Cela poſé, ſi l'on veut que dx ſoit conſtante, c'eſt à dire que MR ſoit égale à mS; il eſt clair que le triangle mSH eſt ſemblable & égal au triangle MRm, & qu'ainſi Hn eſt ddy, c'eſt à dire la difference de Rm & Sn, & $Hk = ddu$. Mais ſi l'on ſuppoſe que du ſoit conſtante, c'eſt à dire que $Mm = mn$ ou à mk, il eſt évident alors que le triangle mgk eſt ſemblable & égal au triangle MRm, & qu'ainſi $kc = ddy$, & Fig. 48. 49.

Sg ou $cn = ddx$. Enfin ſi l'on prend dy pour conſtante, c'eſt à dire $mR = nS$, il s'enſuit que le triangle mil eſt égal & ſemblable au triangle MRm, & qu'ainſi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

FIG. 50. 51. 2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn partent d'un même point B, l'on decrira du centre B les arcs MR, mS, que l'on regardera* comme de petites droites perpendiculaires ſur Bm, Bn; & ayant prolongé Mm en E, & décrit du centre m, de l'intervalle mn, le petit arc nkE, on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kcg paralleles à mS & à Sn. Cela poſé, à cauſe du triangle BSm réctangle en S, l'angle $BmS + mBn$, ou $+ EmH$ vaut un droit, & partant l'angle BmE vaut un droit $+ SmH$; il vaut auſſi le droit $MRm + RMm$, puiſqu'il eſt externe au triangle RMm. Donc l'angle $SmH = RMm$.

*Art. 3.

Il ſuit de ceci, 1°. Que ſi l'on veut que dx ſoit conſtante, c'eſt à dire que les petits arcs MR, mS ſoient égaux entr'eux, le triangle SmH ſera ſemblable & égal au triangle RMm, & qu'ainſi $Hn = ddy$, & $Hk = ddu$. 2°. Que ſi l'on prend du pour conſtante, le triangle gmk ſera ſemblable & égal au triangle RMm, & qu'ainſi kc exprimera ddy & Sg ou cn, ddx. Enfin, 3°. Que ſi l'on prend dy pour conſtante, les triangles iml, RMm ſeront égaux & ſemblables; & qu'ainſi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

Problême.

65. PRENDRE *la différence d'une quantité compoſée de différences quelconques.*

On prendra pour conſtante la différence que l'on voudra, & traittant les autres comme des quantités variables, on ſe ſervira des regles preſcrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour conſtante, ſera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ en prenant dy pour conſtante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $dz\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout divisé par dx, c'est à dire $\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $dzdx\sqrt{dx^2+dy^2}+\frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}-zddx\sqrt{dx^2+dy^2}$, le tout divisé par dx^2, c'est à dire $\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, en prenant dx pour constante, sera $\overline{dy^2+yddy}\sqrt{dx^2+dy^2}-\frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, le tout divisé par dx^2+dy^2, c'est à dire $\frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $\frac{dx^2dy^2+dy^4-ydydxddx}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

La différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre dy pour constante, car dans cette supposition sa difference ddy seroit nulle; & par conséquent elle ne devroit pas se rencontrer dans la quantité proposée.

DÉFINITION II.

Lorsqu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'*infléxion*, lorsque la courbe étant parvenue en F continue son chemin vers le même côté : & point de *rebroussement* lors qu'elle rebrousse chemin du côté de son origine. FIG. 52. 53. 54. 55.

PROPOSITION II.

Problême général.

66. *La nature de la ligne courbe* AFK *étant donnée, déterminer le point d'infléxion ou de rebroussement* F.

FIG. 52. 53. Suposons en premier lieu que la ligne courbe AFK ait pour diametre une ligne droite AB, & que ses appliquées PM, EF, &c. soient toutes paralleles entr'elles. Si l'on mene par le point F, l'appliquée FE avec la tangente FL; & par un point quelconque M de la partie AF, une appliquée MP avec une tangente MT: il est clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'infléxion, que la coupée AP croissant continuellement, la partie AT du diametre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît aussi jusqu'à ce que le point P tombe en E, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT étant appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL lorsque le point P tombe sur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebroussement, que la partie AT croissant continuellement, la coupée AP croît aussi jusqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP étant appliquée en T doit devenir un *plus grand* AE lorsque le point T tombe en L.

Or si l'on nomme AE, x; EF, y; l'on aura $AL = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence, qui est $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$ (en suposant dx constante), étant divisée par dx différence de AE, doit
* Art. 47. être* nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{yddy}{dy^2} = o$ ou à l'infini: de sorte que multipliant par dy^2, & divisant par $-y$, il vient $ddy = o$ ou à l'infini; ce qui servira dans la suite de formule générale pour trouver le point d'infléxion ou de rebroussement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx; & prenant la différence de cette valeur, en suppostant dx constante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2, laquelle étant égalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira

dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions à trouver pour *AE* une valeur telle que l'appliquée *EF* aille couper la courbe *AFK* au point d'infléxion ou de rebrouſſement *F*.

L'origine *A* des x peut être tellement ſitué que $AL = x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu de $\frac{ydx}{dy} - x$, & que *AL* ou *AE* ſoit *un moindre* au lieu d'être un *plus grand*: mais comme la conſéquence eſt toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il eſt à remarquer que *AL* ne peut jamais être $= x + \frac{ydx}{dy}$, car lorſque le point *T* tombe de l'autre côté du point *P*, par rapport à l'origine *A* des x, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ ſera négative ſuivant l'article 10, & par conſéquent celle de $-\frac{ydx}{dy}$ ſera poſitive, de ſorte qu'on aura encore en ce cas $AE + EL$. ou $AL = x - \frac{ydx}{dy}$.

La même choſe ſe peut encore trouver de cette autre maniére. Il eſt clair qu'en prenant dx pour conſtante, & ſuppoſant que l'appliquée y augmente, *Sn* eſt moindre que *SH* ou que *Rm* dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de *Hn* (ddy) doit devenir de poſitive négative ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement *F*; & partant * qu'elle y doit être ou nulle ou infinie. Fig. 48. 49. *Art. 47.

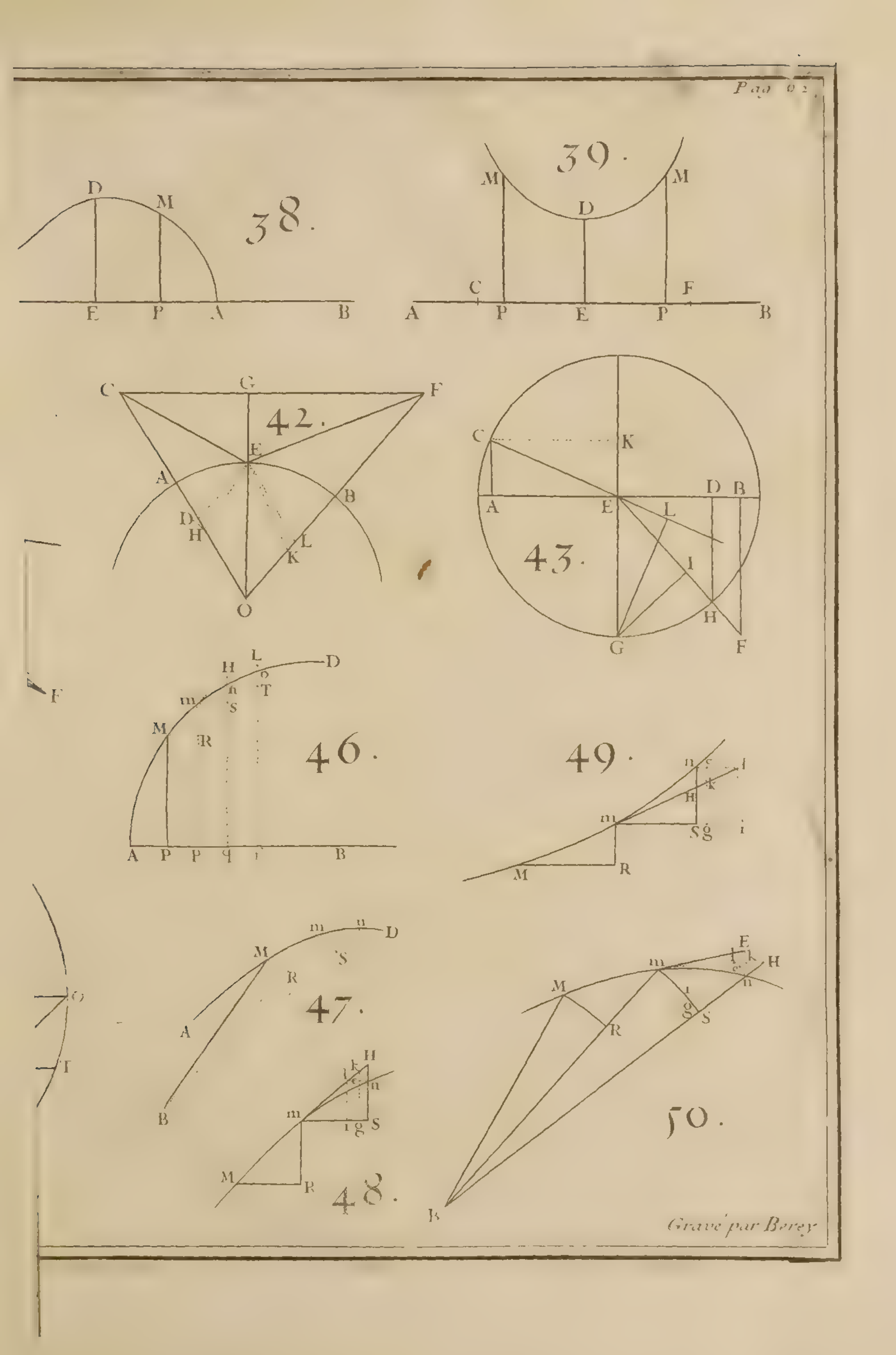
Suppoſons en ſecond lieu que la courbe *AFK* ait pour appliquées les droites *BM*, *BF*, *BM*, qui partent toutes d'un même point *B*. Si l'on mene telle appliquée *BM* qu'on voudra, avec une tangente *MT* qui rencontre *BT* perpendiculaire à *BM* au point *T*; & qu'ayant pris le point *m* infiniment près de *M*, l'on tire l'appliquée *Bm*, la tangente *mt*, & la perpendiculaire *Bt* ſur *Bm*, qui rencontre *MT* en *O*; il eſt viſible (en ſuppoſant que l'appliquée *BM*, qui devient *Bm*, augmente) que dans la partie concave, *Bt* ſurpaſſe *BO*, & qu'au contraire elle eſt moindre dans la partie convexe; de ſorte que ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement *F*, la valeur de *Ot* doit devenir de poſitive negative. Fig. 54. 55. Fig. 56. 57.

Cela poſé, ſi l'on décrit du centre *B* les petits arcs de cercle *MR*, *TH*, on formera les triangles ſemblables *mRM*, *MBT*, *THO*, & les petits ſécteurs ſemblables *BMR*, *BTH*. Nommant donc *BM*, y; *MR*, dx; l'on aura *mR* (dy). *RM* Fig. 56.

(dx) :: $BM(y)$. $BT = \frac{ydx}{dy}$ :: $MR\ (dx)$. $TH = \frac{dx^2}{dy}$ :: TH $(\frac{dx^2}{dy})$. $HO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de BT $(\frac{ydx}{dy})$ en supposant dx constante, il vient $Bt - BT$ ou $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. D'où il suit en multipliant par dy^2, & divisant par dx, que la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ sera nulle ou infinie sous le point d'inflexion ou de rebroussement F. Or la nature de
Fig. 54. 55. la ligne AFK étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en dx, & de ddy en dx^2, lesquelles étant substituées dans $dx^2 + dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant egalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F. Ce qui étoit proposé.

Fig. 50. 51. Pour trouver encore la même chose d'une autre maniére, il faut considérer que dans la partie concave l'angle BmE surpasse l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il
Fig. 50. est moindre ; & partant que l'angle $BmE - Bmn$ ou Emn, c'est à dire l'arc En qui en est la mesure, devient de positif négatif sous le point cherché F. Or prenant dx pour constante, les triangles réctangles semblables HmS, Hnk, donneront $Hm\ (du)$. $mS\ (dx)$ :: $Hn\ (-ddy)$. $nk = -\frac{dxddy}{du}$. ou l'on doit observer que la valeur de Hn est négative, parceque $Bm\ (y)$ croissant, $Rm\ (dy)$ diminue. Mais à cause des sécteurs semblables BmS, mEk, l'on aura $Bm\ (y)$. mS (dx) :: $mE\ (du)$. $Ek = \frac{dxdu}{y}$, & partant $Ek + kn$ ou $En =$
Fig. 54. 55. $\frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. D'où il suit en multipliant par ydu, & divisant par dx, que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit devenir de positive, négative sous le point cherché F.

Si l'on suppose que y devienne infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport au terme $yddy$; & par conséquent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = o$ ou à l'infini, se changera en cette autre $-yddy = o$ ou à l'infini, c'est à dire en divisant par $-y$, $ddy = o$ ou à l'infini, qui est la formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque


38.
D
M
E
P
A
B
39.
M
M
D
C
F
A
P
E
P
B
42.
C
G
F
E
A
B
D
H
L
K
O
43.
C
K
D
B
A
E
L
I
H
G
F
46.
H
L
D
T
S
M
R
A
P
P
q
r
B
49.
n
k
H
m
S
g
M
R
47.
m
n
D
M
S
R
A
B
48.
H
k
n
m
g
S
M
R
50.
E
H
m
M
R
S
n
K
Gravé par Berey

les appliquées *BM*, *BF*, *BM* deviennent alors paralleles.

COROLLAIRE.

67. LORSQUE $ddy = o$, il eſt clair que la différence de *AL* doit être nulle par rapport à celle de *AE*; & partant que les deux tangentes infiniment proches *FL*, *fL* doivent tomber l'une ſur l'autre, en ne faiſant qu'une ſeule ligne droite *fFL*. Mais lorſque $ddy =$ à l'infini, la différence de *AL* doit être infiniment grande par rapport à celle de *AE*, ou (ce qui eſt la même choſe) la différence de *AE* eſt infiniment petite par rapport à celle de *AL*; & par conſéquent l'on peut mener par le même point *F* deux tangentes *FL*, *Fl* qui faſſent entr'elles un angle infiniment petit *LFl*. Fig. 52. Fig. 53.

De même lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, il eſt viſible que *Ot* doit devenir nulle par rapport à *MR*; & qu'ainſi les deux tangentes infiniment proches *MT*, *mt*, doivent tomber l'une ſur l'autre, lorſque le point *M* devient un point d'infléxion ou de rebrouſſement : mais au contraire lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, *Ot* doit être infinie par rapport à *MR*, ou (ce qui eſt la même choſe) *MR* infiniment petite par rapport à *Ot*; & par conſéquent le point *m* doit tomber ſur le point *M*, c'eſt à dire qu'on peut mener par le même point *M* deux tangentes qui faſſent entr'elles un angle infiniment petit, lorſque ce point devient un point d'infléxion ou de rebrouſſement. Fig. 56. 57.

Il eſt évident que la tangente au point d'infléxion ou de rebrouſſement *F*, étant prolongée, touche & coupe la courbe *AFK* dans ce même point.

EXEMPLE I.

68. SOIT une ligne courbe *AFK* qui ait pour diametre la ligne droite *AB*, & qui ſoit telle que la relation de la coupée *AE* (x) à l'appliquée *EF* (y), ſoit exprimée par l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour *AE* une valeur telle que l'appliquée *EF* rencontre la courbe *AFK* au point d'infléxion *F*. Fig. 58.

L'équation à la courbe est $y = \frac{axx}{xx+aa}$; & partant $dy = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$, & prenant la différence de cette quantité en supposant dx constante, & l'égalant ensuite à zero, on trouve $\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4} = 0$; ce qui multiplié par $\overline{xx+aa}^4$, & divisé par $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$, donne $xx + aa - 4xx = 0$, d'où l'on tire $AE\ (x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx sa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$, on trouve $EF\ (y) = \frac{1}{4}a$; de sorte qu'on peut déterminer le point d'infléxion F sans supposer que la courbe AFK soit décrite.

Si l'on mene AC parallele aux appliquées EF, & égale à la droite donnée a, & qu'on tire CG parallele à AB, elle sera asymptote de la courbe AFK. Car si l'on suppose x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$ se changera en celle-ci $y = a$.

EXEMPLE II.

69. SOIT $y - a = \overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Donc $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$, en prenant dx pour constante. Or si l'on suppose cette fraction égale à zero, on trouve $-6dx^2 = 0$; ce qui ne faisant rien connoître, il la faut supposer infiniment grande; & par conséquent son dénominateur $25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}$ infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue $AE\ (x) = a$.

EXEMPLE III.

FIG. 59. 70. SOIT une demi roulette allongée AFK dont la base BK surpasse la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer

sur

sur le diametre AB, le point E, en sorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'infléxion F.

Ayant nommé les connues ADB, a; BK, b; $AB, 2c$; & les inconnues AE, x; ED, z; l'arc AD, u; EF, y; l'on aura par la proprieté de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & partant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la proprieté du cercle l'on aura $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$, & $du\ (\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour constante) donne $\frac{bcx - acc - bcc \times dx^2}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$; d'où l'on tire $AE\ (x) = c + \frac{ac}{b}$, & $CE = \frac{ac}{b}$.

Il est clair qu'afin qu'il y ait un point d'infléxion F, il faut que b surpasse a; car s'il étoit moindre, CE surpasseroit CB.

EXEMPLE IV.

71. ON demande le point d'infléxion F de la Conchoïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour asymptote la droite BC. Sa proprieté est telle, qu'ayant mené du pole P à un de ses points quelconques F la droite PF, qui rencontre l'asymptote BC en D; la partie DF est toujours égale à une même droite donnée a. FIG. 60.

Ayant mené PA perpendiculaire, & FE parallele à BC, on nommera les connues AB ou FD, a; BP, b; & les inconnues BE, x; EF, y; & tirant DL parallele à BA, les triangles semblables DLF, PEF donneront $DL\ (x) \cdot LF\ (\sqrt{aa - xx}) :: PE\ (b + x) \cdot EF\ (y) = \frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}$. dont la difference est $dy = \frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Si donc on prend la difference de cette quantité, & qu'on l'égale à zero, on formera l'égalité $\frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx \times dx^2}{aax^3 - x^5 \times \sqrt{aa - xx}} = 0$,

qui se réduit à $x^3 + 3bxx - 2aab = o$, dont l'une des racines fournit pour BE la valeur cherchée.

Si $a = b$, l'equation précedente se changera en cette autre $x^3 + 3axx - 2a^3 = o$, laquelle étant divisée par $x + a$, donne $xx + 2ax - 2aa = o$; & partant $BE\ (x) = -a + \sqrt{3aa}$.

Autrement.

En prenant pour appliquees les lignes PF qui partent *Art. 66. du pole P, & en se servant de la formule * $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui fasse avec PF l'angle FPf infiniment petit, & decrit du centre P les petits arcs FG, DH, on nommera les connues AB, a; BP, b; & les inconnues PF, y; PD, z; & l'on aura par la proprieté de la conchoïde $y = z + a$, ce qui donne $dy = dz$. Or à cause du triangle rectangle DBP, $DB = \sqrt{zz - bb}$; & à cause des triangles semblables DBP & dHD, PDH & PFG, l'on aura $DB\ (\sqrt{zz - bb}) . BP\ (b) :: dH\ (dz) . HD = \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}$. Et $PD\ (z) . PF\ (z + a) :: HD\ \left(\frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}\right) . FG\ (dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz - bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab}$, dont la différence est (en supposant dx constante) $ddy = \frac{\overline{bz^3 + 2abzz - ab^3} \times dzdx}{\overline{bz + ab}^2 \sqrt{zz - bb}} = \frac{\overline{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^3}$ en mettant pour dz sa valeur. Donc si l'on substitue dans la *Art. 66. formule générale * $yddy = dx^2 + dy^2$ à la place de y sa valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient de trouver en dx & dx^2; on formera cette équation $\frac{\overline{z^4 + 2az^3 - abbz} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2} = \frac{\overline{z^4 + 2abbz + aabb} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2}$ qui se réduit à $2z^3 - 3bbz - abb = o$, dont l'une des racines augmentée de a fournit la valeur de l'inconnue PF.

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3aaz - a^3 = o$, qui étant divisée par $z + a$, donne $zz - az - \frac{aa}{2} = o$, dont la résolution fournit $PF\ (z + a) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$.

EXEMPLE V.

72. SOIT une autre eſpece de Conchoïde AFK, telle Fig. 60. qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'aſymptote BC en D, le rectangle $PD \times DF$ ſoit toujours égal au même réctangle $PB \times BA$. On demande le point d'inflexion F.

Si l'on nomme les inconnues BE, x; EF, y; & les connues AB, a; BP, b; on aura $PD \times DF = ab$; & les paralleles BD, EF donneront $PD \times DF\ (ab)$. $PB \times BE\ (bx)$ :: $\overline{PF}^2\ (bb + 2bx + xx + yy)$. $\overline{PE}^2\ (bb + 2bx + xx)$. Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$, & $y = \overline{b + x}\sqrt{\frac{a - x}{x}}$ $= \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a - x}{x}}$, dont la différence donne dy $= \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$; & prenant encore la différence, on forme l'égalité $\frac{\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2}{\overline{4axx - 4x^3} \times \sqrt{ax - x^2}} = 0$, qui ſe réduit à $x = \frac{3ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE.

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$ valeur de dy égal à zero, l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = 0$, dont les deux racines $\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ & $\frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ fourniſſent, lorſque a ſurpaſſe $8b$, deux valeurs de BH & BL, telles que l'appliquée Fig. 61. HM eſt moindre que ſes voiſines, & l'appliquée LN plus grande, c'eſt à dire que les tangentes en M & N ſeront paralleles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L.

Mais lorſque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL ſeront éga- Fig. 62. les chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'infléxion F ſera parallele à l'axe AB. Et enfin lorſque a eſt moindre que $8b$, les deux racines ſeront imaginaires; & par conſéquent il n'y aura aucune tangente qui puiſſe être parallele à l'axe.

On pourroit encore résoudre cette queſtion en prenant pour appliquées les lignes PF, Pf, qui partent du pole P, & en ſe ſervant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'éxemple précédent. Fig. 60.

Exemple VI.

Fig. 63. 73. Soit un cercle AED qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK telle qu'ayant mené à diſcrétion le rayon BFE, le quarré de FE ſoit égal au réctangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'infléxion F.

Ayant nommé l'arc AE, z; le rayon BA ou BE, a; & l'appliquée BF, y; on aura $bz = aa - 2ay + yy$, & (en prénant les différences) $\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cauſe des ſécteurs ſemblables BEe, BFG, on fera $BE\,(a) . BF\,(y) :: Ee\,(\frac{2ydy - 2ady}{b}) . FG\,(dx) = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$. dont la différence, en ſuppoſant dx conſtante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$. Si donc on ſubſtitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs en dy^2 dans la formule generale* $yddy = dx^2 + dy^2$, on formera l'équation $\frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb}$ qui ſe réduit à $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0$, dont la reſolution fournira pour BF la valeur cherchée. * Art. 66.

Il eſt évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir un point d'infléxion F. Car la circonférence AED ne differant pas d'abord ſenſiblement de la tangente en A, il ſuit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'enſuite la courbure de la circonférence autour de ſon centre devenant ſenſible, elle doit devenir concave vers ce centre.

EXEMPLE VII.

74. SOIT une ligne courbe *AFK* qui ait pour axe la droite *AB*, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené une tangente quelconque *FB* qui rencontre *AB* au point *B*, la partie interceptée *AB* ſoit toujours à la tangente *BF* en raiſon donnée de m à n. Il eſt queſtion de determiner le point de rebrouſſement *F*. Fig. 64.

Ayant nommé les inconnues & variables *AE*, x; *EF*, y; l'on aura $EB = -\frac{ydx}{dy}$ (parceque x croiſſant, y diminue), $FB = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$. Or par la proprieté de la courbe, $AE + EB$ ou $AB \left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right) . BF \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}\right) :: m . n$. Donc $m\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{nxdy}{y} - ndx$, & ſa différence donne $\frac{mdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{-nydxdy + nxyddy - nxdy^2}{yy}$ en ſuppoſant dx conſtante & négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-nydxdy - nxdy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{myydy - nxy\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Maintenant ſi l'on fait cette fraction égale à zero, on trouvera $-ydx - xdy = 0$; ce qui ne fait rien connoître. C'eſt pourquoi il faut ſuppoſer cette fraction égale à l'infini, c'eſt à dire ſon dénominateur égal à zero; ce qui donne $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$ à cauſe de l'équation à la courbe, d'où l'on tire $dx = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. Or quarrant chaque membre de l'équation $mydy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve encore $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. d'où l'on tire enfin $y\sqrt{mm - nn} = nx$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit décrit du diametre $AD = m$, un demi-cercle *AID*; & ayant pris la corde $DI = n$, ſoit tirée l'indéfinie *AI*. Je dis qu'elle rencontrera la courbe *AFK* au point de rebrouſſement *F*.

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB, les triangles réctangles semblables DIA, IHA, FEA donneront DI $(n) . IA (\sqrt{mm - nn}) :: IH . HA :: FE (y) . EA (x)$. & partant $y\sqrt{mm - nn} = nx$ qui étoit le lieu à construire.

Il est clair que BF est parallele à DI, puisque $AB . BF :: AD (m) . DI (n)$. d'où il suit que l'angle AFB est droit; & partant que les lignes AB, BF, BE sont en proportion continue.

On peut trouver cette même proprieté sans aucun calcul, si l'on imagine * au même point de rebroussement F deux tangentes FB, Fb qui fassent entr'elles un angle BFb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc BL, on aura $m . n :: Ab . bF :: AB . BF :: Ab - AB$ ou $Bb . bF - BF$ ou $bL :: BF . BE$. à cause des triangles réctangles semblables BbL, FBE. Donc, &c.

* Art 67.

Si $m = n$, il est évident que la droite AF deviendra perpendiculaire sur l'axe AB; & qu'ainsi la tangente FB sera parallele à cet axe; ce que l'on sçait d'ailleurs devoir arriver, puisqu'en ce cas la courbe AF doit être un demi-cercle qui ait son diametre perpendiculaire sur l'axe AB. Mais si m étoit moindre que n, il est évident qu'il n'y auroit aucun point de rebroussement, parcequ'alors l'équation $y\sqrt{mm - nn} = nx$ renfermeroit une contradiction.



SECTION V.

Usage du calcul des différences pour trouver les Dévelopées.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque *BDF* concave vers le même côté, soit envelopée ou entourée d'un fil *ABDF*, dont l'une des extrémités soit fixe en *F*, & l'autre soit tendue le long de la tangente *BA*, & que l'on fasse mouvoir l'extrémité *A* en la tenant toujours tendue & en dévelopant continuellement la courbe *BDF*; il est clair que l'extrémité *A* de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe *AHK*. Fig. 65.

Cela posé, la courbe *BDF* sera nommée la *Dévelopée* de la courbe *AHK*.

Les parties droites *AB*, *HD*, *KF* du fil *ABDF* seront nommées les *rayons de la dévelopée*.

COROLLAIRE I.

75. DE ce que la longueur du fil *ABDF* demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe *BD* est égale à la différence des rayons *DH*, *BA* qui partent de ses extrémités; de même la portion *DF* sera égale à la différence des rayons *FK*, *DH*; & la courbe entiere *BDF* à la différence des rayons *FK*, *BA*. D'où l'on voit que si le rayon *BA* de la courbe étoit nul, c'est à dire que si l'extrémité *A* du fil tomboit sur l'origine *B* de la courbe *BDF*, alors les rayons de la dévelopée *DH*, *FK* seroient égaux aux portions *BD*, *BDF* de la courbe *BDF*.

COROLLAIRE II.

76. SI l'on considére la courbe *BDF* comme un poligone *BCDEF* d'une infinité de côtés; il est clair que l'extrémité *A* du fil *ABCDEF* décrit le petit arc *AG* qui a pour Fig. 66.

centre le point *C*, jusqu'à ce que le rayon *CG* ne fasse plus qu'une ligne droite avec le petit côté *CD* voisin de *CB*; & de même qu'elle décrit le petit arc *GH* qui a pour centre le point *D*, jusqu'à ce que le rayon *DH* ne fasse plus qu'une droite avec le petit côté *DE*; & ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe *BCDEF* soit entiérement developée. La courbe *AHK* peut être donc considérée comme l'assemblage d'une infinite de petits arcs de cercle *AG*, *GH*, *HI*, *IK*, &c. qui ont pour centre les points *C*, *D*, *E*, *F*, &c. D'où il suit,

1°. Que les rayons de la dévelopée la touchent continuellement comme *DH* en *D*, *KF* en *F*, &c. Et qu'ils sont tous perpendiculaires à la courbe *AHK* qu'ils décrivent, comme *DH* en *H*, *FK* en *K*, &c. Car *DH*, par éxemple, est perpendiculaire sur le petit arc *GH* & sur le petit arc *HI*, puisqu'elle passe par leurs centres *D*, *E*. D'où

FIG. 65. l'on voit, 1°. que la developee *BDF* termine l'espace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe *AHK*. 2°. Que si l'on prolonge un rayon quelconque *HD* qui coupe le rayon *AB* en *R*, jusqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque *KF* en *S*, l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie *RS* deux perpendiculaires sur la courbe *AHK*, excepté du point touchant *D* duquel on n'en peut mener qu'une seule, sçavoir *DH*. Car il est clair que l'intersection *R* des rayons *AB*, *DH* parcourt tous les points de la partie *RS*, pendant que le rayon *AB* décrit par son extremite *A* la ligne *AHK* sur laquelle il est continuellement perpendiculaire: & que les rayons *AB*, *HD* ne se confondent que lorsque l'intersection *R* tombe sur le point touchant D.

FIG. 66. 2°. Que si l'on prolonge les petits arcs *HG* en *l*, *IH* en *m*, *KI* en *n*, &c. vers l'origine *A* du dévelopement, chaque petit arc comme *IH* touchera en dehors son voisin *HG*, parceque les rayons *CA*, *DG*, *EH*, *FI* vont toujours en augmentant, à mesure que les petits arcs qui composent la courbe *AHK*, s'éloignent du point *A*. Par la même raison si l'on prolonge les petits arcs *AG* en *o*, *GH* en *p*,

HI

HI en *q*, vers le côté opposé au point *A*; chaque petit arc comme *HI* touchera en dessous son voisin *IK*. Or puisque les points *H* & *I*, *D* & *E* peuvent être considérés comme tombant l'un sur l'autre à cause de l'infinie petitesse tant de l'arc *HI*, que du côté *DE*; il s'ensuit que si l'on décrit d'un point quelconque moyen *D* de la dévelopée *BDF* comme centre, & de son rayon *DH* un cercle *mHp*, il touchera en dehors la partie *HA* qui tombera toute entiere au dedans de ce cercle, & en dedans de l'autre partie *HK* qui tombera toute entiére au dehors de ce même cercle : c'est à dire qu'il touchera & coupera la courbe *AHK* au même point *H*, de même que la tangente au point d'infléxion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon *HD* du petit arc *HG*, ne différant des rayons *CG*, *EH* des arcs voisins *GA*, *HI*, que d'une quantité infiniment petite *CD* ou *DE*; il s'ensuit que pour peu qu'on diminue le rayon *DH*, il sera moindre que *CG*, & qu'ainsi son cercle touchera en dessous la partie *HA*; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il surpassera *HE*, & qu'ainsi son cercle touchera en dehors la partie *HK* : de sorte que le cercle *mHp* est le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie *HA*, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie *HK* : c'est à dire qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire passer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'ensuit que la courbure du petit arc *HI* sera à la courbure du petit arc *AG* réciproquement comme le rayon *BA* ou *CA* de ce dernier est à son rayon *DH* ou *EH*: c'est à dire que la courbure en *H* de la courbe *AHK* sera à sa courbure en *A* comme le rayon *BA* au rayon *DH*; & de même que la courbure en *K* est à la courbure en *H* comme le rayon *DH* est au rayon *FK*. D'où l'on voit que la courbure de la ligne *AHK* diminue continuellement à mesure que la ligne *BDF* se dévelope; de sorte qu'au point *A*, où commence le dévelopement, elle est la plus grande qu'il est possible;

& au point *K*, où je suppose qu'il cesse, la plus petite.

5°. Que les points de la dévelopée ne sont autre chose que le concours des perpendiculaires menées par les extremités des petits arcs qui composent la courbe *AHK*. Par exemple, le point *D* ou *E* est le concours des perpendiculaires *HD*, *IE* du petit arc *HI*; de sorte que si la courbe *AHK* est donnée avec la position d'une de ses perpendiculaires *HD*, pour trouver le point *D* ou *E*, où elle touche la dévelopée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches *HD*, *IE*: c'est ce qu'on va enseigner dans le Problême qui suit.

PROPOSITION I.

Problême général.

FIG. 67. 77. LA *nature de la ligne courbe* AMD *étant donnée avec une de ses perpendiculaires quelconque* MC; *déterminer la longueur du rayon* MC *de sa dévelopée: c'est à dire le concours des perpendiculaires infiniment proches* MC, mC.

Supposons en premier lieu que la ligne courbe *AMD* ait pour axe la ligne droite *AB* sur laquelle les appliquées *PM* soient perpendiculaires. On imaginera une autre appliquée *mp*, qui sera infiniment proche de *MP*; puisque le point *m* est supposé infiniment près de *M*. On menera par le point de concours *C* une parallele *CE* à l'axe *AB*, laquelle rencontre les appliquées *MP*, *mp* aux points *E*, *e*. Enfin menant *MR* parallele à *AB*, on formera les triangles réctangles semblables *MRm*, *MEC*; car les angles *EMR*, *CMm* étant droits, & l'angle *CMR* leur étant commun, l'angle *EMC* sera égal à l'angle *RMm*.

Si donc l'on nomme les données *AP*, x; *PM*, y; l'inconnue *ME*, z; l'on aura *Ee* ou *Pp* ou $MR = dx$, $Rm = dy = dz$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & $MR\ (dx) . Mm\ (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: ME\ (z) . MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point *C* étant le centre du petit arc *Mm*, son rayon *CM* qui devient *Cm* lorſ-

que EM augmente de sa différence Rm, demeure le même. Sa différence sera donc nulle : ce qui donne (en supposant dx constante) $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$; d'où lon tire $ME\,(z) = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ en mettant pour dz sa valeur dy.

Supposons en second lieu que les appliquées BM, Bm partent toutes d'un même point B. Ayant mené du point cherché C sur les appliquées, que je suppose infiniment proches, les perpendiculaires CE, Ce, & décrit du centre B le petit arc MR ; on formera les triangles réctangles semblables RMm & EMC, BMR, BEG & CeG. C'est pourquoi nommant BM, y ; ME, z ; MR, dx ; on aura $Rm = dy$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, CE ou $Ce = \frac{zdy}{dx}$, & $MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. On trouvera ensuite, comme dans le premier cas, $z = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy}$. Or $BM\,(y) . Ce\,(\frac{zdy}{dx}) :: MR\,(dx) . Ge = \frac{zdy}{y}$ & $me - ME$ ou $Rm - Ge = dz = \frac{ydy - zdy}{y}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz, l'on aura $ME\,(z) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$. Fig. 68.

Si l'on suppose que y soit infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport à $yddy$; & par conséquent cette derniere formule se changera en celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver ; puisque les appliquées deviennent alors paralleles entr'elles, & que l'arc MR devient une droite perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe AMD étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, ou de dx^2 & ddy en dy^2, lesquelles étant substituées dans les formules précédentes, donneront pour ME une valeur délivrée des différences, & entierement connue. Et menant EC perpendiculaire sur ME, elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

FIG. 67. 68. 78. A cauſe des triangles réctangles ſemblables *MRm* & *MEC*, l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, & dans le ſecond cas $MC = \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

REMARQUE.

79. Il y a encore pluſieurs autres maniéres de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne poſſedent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées ſont perpendiculaires à l'axe.

FIG. 67. Premiere maniére. Soit prolongée *MR* en *G* où elle rencontre la perpendiculaire *mC*. Les angles droits *MRm*, *MmG* donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conſéquent $MG = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$. Or à cauſe des triangles ſemblables *MRm*, *MPQ* (les points *Q*, *q* marquent les interſections des perpendiculaires infiniment proches *MC*, *mC* avec l'axe *AB*) il vient $MQ = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $PQ = \frac{ydy}{dx}$; & partant $AQ = x + \frac{ydy}{dx}$, dont la difference donne (en prenant *dx* pour conſtante) $Qq = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$; & à cauſe des triangles ſemblables *CMG*, *CQq*, l'on aura $MG - Qq \left(\frac{-yddy}{dx}\right) . MG \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx}\right) :: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$.

Seconde maniére. Ayant décrit du centre *C* le petit arc *QO*, les petits triangles réctangles *QOq*, *MRm* ſeront ſemblables, puiſque *Mm*, *QO* & *MR*, *Qq* ſont paralleles; & partant $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) . MR (dx) :: Qq \left(\frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx}\right) . QO = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or les ſécteurs ſemblables *CMm*,

CQO donnent $Mm - QO\left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2})$. $:: MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Troisiéme maniere. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt, on aura $PT - AP$ ou $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TH, on formera le triangle réctangle HTt semblable à RmM, car les angles HtT, RMm ou PTM sont égaux, ne différant entr'eux que de l'angle Tmt qui est infiniment petit; ce qui donne $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}) . mR\,(dy) :: Tt\left(-\frac{ydxddy}{dy^2}\right) . TH = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les sécteurs TmH, MCm sont semblables, car l'angle $Tmt + MmC$ vaut un droit, & l'angle $MmC + MCm$ vaut aussi un droit à cause du triangle CMm consideré comme réctangle en M. Donc $TH\left(-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Tm$ ou $TM\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) . MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Quatriéme maniére. On marquera * les différences secondes en prenant dx pour constante; & les triangles réctangles semblables HmS, Hnk donneront Hm ou Mm $(\sqrt{dx^2+dy^2}) . mS$ ou $MR\,(dx) :: Hn\,(-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or l'angle kmn est égal à celui que font entr'elles les tangentes aux points M, m; & partant comme l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm; d'où il suit que les sécteurs nmk, MCm sont semblables, & qu'ainsi nk $\left(-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . mk$ ou * $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Mm$ $(\sqrt{dx^2+dy^2}) . MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH ou Mm pour mk, parcequ'elles ne différent entr'elles que de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles; de même que Hn est infiniment moindre que Rm ou Sn.

* *Art.* 64.
FIG. 69.
* *Art.* 2.

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

Fig. 68. Premiére maniére. Ayant mené du point fixe B les perpendiculaires BF, Bf sur les rayons infiniment proches CM, Cm; les triangles réctangles mMR, BMF, qui sont semblables (puisqu'ajoûtant aux angles mMR, BMF le même angle FMR, ils composent chacun un angle droit), donneront MF ou $MH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, & $BF = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $Bf - BF$ ou Hf $= \frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{dx^2 + dy^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or à cause des séceurs semblables CMm, CHf, on forme cette proportion $Mm - Hf \,.\, Mm :: MH \,.\, MC$, & partant $MC = \frac{ydx^2 + ydy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

* Art. 64. Fig. 70. Seconde maniére. On marquera * les différences secondes en supposant dx constante; & les séceurs semblables BmS, mEk donneront $Bm\,(y) \,.\, mS\,(dx) :: mE\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) \,.\, Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$. Or à cause des triangles réctangles semblables HmS, Hnk, l'on aura Hm ou $Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) \,.\, mS$ ou $MR\,(dx) :: Hn\,(-ddy) \,.\, nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Et partant $En = \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & prenant une troisiéme proportionnelle à En, Em ou Mm, les séceurs semblables Emn, MCm donneront pour MC la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme $Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2})$, du; & qu'on prenne dy pour constante au lieu de dx, on trouvera dans le premier cas $MC = \frac{du^3}{dyddx}$, & dans le second $MC = \frac{ydu^3}{dxdu^2 + ydyddx}$. Et enfin si l'on prend du pour constante, il vient dans le premier cas $MC = \frac{dxdu}{-ddy}$ ou $\frac{dydu}{ddx}$ (parceque la différence de $dx^2 + dy^2 = du^2$ est $dxddx$

$+ dyddy = o$, & qu'ainſi $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$); & dans le ſecond, $MC = \frac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$ ou $\frac{ydydu}{dxdy + yddx}$.

COROLLAIRE II.

80. COMME l'on ne trouve pour ME ou MC qu'une ſeule valeur, il s'enſuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une ſeule dévelopée BCG. FIG. 72.

COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de ME $\left(\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}\right)$ ou $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right)$ FIG. 67. 68.
eſt poſitive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul; d'où l'on voit que la courbe ſera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais ſi la valeur de ME eſt négative, il faudra prendre le point E du côté oppoſé; d'où l'on voit que la courbe ſera alors convexe. De ſorte qu'au point d'infléxion ou de rebrouſſement qui ſepare la partie concave de la convexe, la valeur de ME doit devenir de poſitive négative; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne ſe peut faire qu'en deux maniéres. Car ou elles vont en croiſſant à meſure qu'elles approchent du point d'infléxion ou de rebrouſſement; & il faudra pour lors qu'elles deviennent paralleles, c'eſt à dire que le rayon de la dévelopée ſoit infini: ou elles vont en diminuant; & il faudra néceſſairement alors qu'elles tombent l'une ſur l'autre, c'eſt à dire que le rayon de la dévelopée ſoit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la ſéction précédente.

REMARQUE.

82. COMME l'on a cru juſqu'ici que le rayon de la dévelopée étoit toujours infiniment grand au point d'in-

fléxion, il eſt à propos de faire voir qu'il y a, pour ainſi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'infléxion le rayon de la dévelopée egal à zero; au lieu qu'il n'y en a qu'un ſeul genre dans lequel ce rayon ſoit infini.

Fig. 71. Soit *BAC* une des courbes qui ont dans leur point d'infléxion *A* le rayon de la developée infini. Si l'on dévelope les parties *BA*, *AC*, en commençant au point *A*; il eſt clair qu'on formera une ligne courbe *DAE* qui aura auſſi un point d'infléxion dans le même point *A*, mais dont le rayon de la developée en ce point, ſera égal à zero. Et ſi l'on formoit de la même ſorte une troiſiéme courbe par le dévelopement de la ſeconde *DAE*, & une quatriéme par le dévelopement de la troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini; il eſt clair que le rayon de la dévelopée dans le point d'infléxion *A* de toutes ces courbes, ſeroit toujours égal à zero. Donc, &c.

PROPOSITION II.

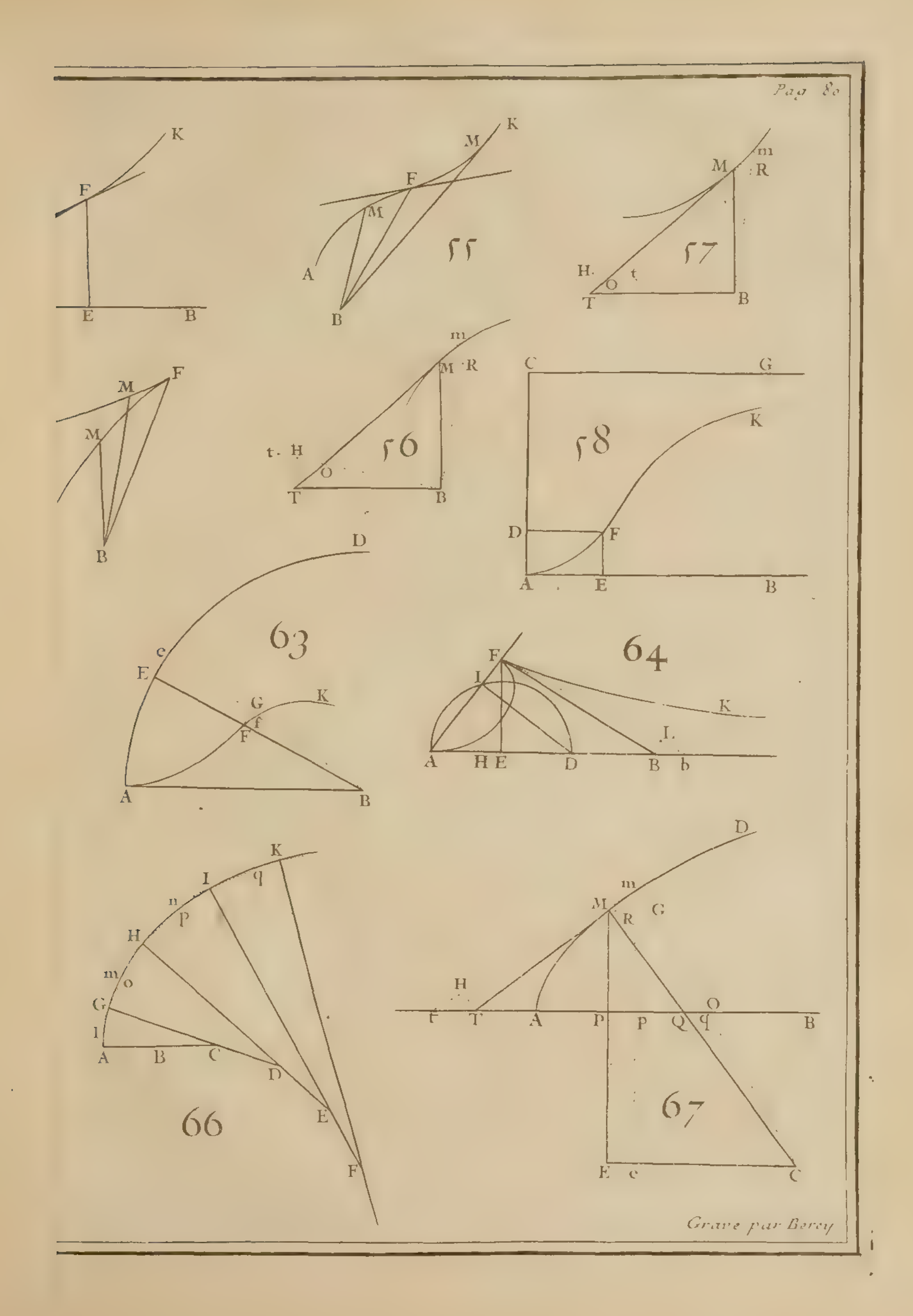
Problême.

Fig. 72. 83. TROUVER *dans les courbes* AMD, *où l'axe* AB *fait avec la tangente en* A *un angle droit*, *le point* B *où cet axe touche la dévelopée* BCG.

Si l'on ſuppoſe que le point *M* devienne infiniment près du ſommet *A*, il eſt clair que la perpendiculaire *MQ* rencontrera l'axe au point cherché *B*; d'où il ſuit que ſi l'on cherche en général la valeur de *PQ* ($\frac{ydy}{dx}$) en x ou en y, & qu'on faſſe enſuite x ou $y = o$, on déterminera le point *P* à tomber ſur le point *A*, & le point *Q* ſur le point cherché *B*; c'eſt à dire que *PQ* deviendra alors egale à la cherchée *AB*. Ceci s'éclaircira par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Fig. 72. 84. SOIT la courbe *AMD* une Parabole qui ait pour para-


K
F
E B
K
M
F
M
A
55
B
m
M R
57
H.
t
O
T B
F
M
M
B
m
M R
t. H
56
O
T B
C G
58
K
D F
A E B
D
63
e
E
G K
f
F
A B
F
64
I
K
L
A H E D B b
K
I q
n
P
H
m
o
G
l
A B C
D
66
E
F
D
m
M G
R
H
t T A P p Q q B
O
67
E e C
Gravé par Berey

parametre la droite donnée a. L'équation à la parabole est $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette derniere équation, en supposant dx constante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on aura * $ME = \frac{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. * *Art.* 77.
Ce qui donne cette construction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallele à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent $MP(\sqrt{ax}) \,.\, PT(2x) :: PT(2x) \,.\, PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; & par conséquent $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cause des triangles réctangles MPQ, MEC, l'on aura $PM(\sqrt{ax}) \,.\, PQ(\frac{1}{2}a) :: ME(\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}) \,.\, EC$ ou $PK = \frac{1}{2}a + 2x$. & partant $QK = 2x$. Ce qui donne cette nouvelle construction.

Soit prise QK double de AP, ou (ce qui revient au même) soit prise PK égale à TQ, & soit menée KC parallele à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui sera à la dévelopée BCG.

Autre maniére. $yy = ax$, & $2ydy = adx$ dont la différence (en supposant dx constante) donne $2dy^2 + 2yddy = 0$; d'où l'on tire $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME = \frac{ydy^2+ydx^2}{dy^2}$; & partant * *Art.* 77.
EC ou $PK = \frac{ydy^2+ydx^2}{dydx} = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$ ou TQ. Ce qui donne les mêmes constructions qu'auparavant. Car $MP \,.\, PT :: dy \,.\, dx :: PT(\frac{ydx}{dy}) \,.\, PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

Pour trouver à préſent le point *B* où l'axe *AB* touche la dévelopée *BCG*. On a $PQ(\frac{ydy}{dx}) = \frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité eſt conſtante, elle demeurera toûjours la même en quelque endroit que ſe trouve le point *M*. Et ainſi, lorſqu'il tombe ſur le ſommet *A*, l'on aura encore *PQ* qui devient en ce cas $AB = \frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la dévelopée *BCG* à la maniére de *Deſcartes*. On nommera la coupée *BK*, *u*; l'appliquée *KC* ou *PE*, *t*; d'où l'on aura $CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ & $AP + PK - AB(u) = 3x$; mettant donc pour *x* ſa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, l'on en formera une nouvelle $27att = 16u^3$ qui exprimera la relation de *BK* à *KC*. D'où l'on voit que la dévelopée *BCG* de la parabole ordinaire eſt une ſeconde parabole cubique dont le parametre eſt égal à $\frac{27}{16}$ du parametre de la parabole donnée.

Fig. 73. Il eſt viſible que la dévelopée *CBC* de la parabole commune entiere *MAM* a deux parties *CB*, *BC* qui ont leurs convexités oppoſées l'une à l'autre, de ſorte qu'elles forment en *B* un point de rebrouſſement.

Avertissement.

Fig. 72. *On entend par* courbes geométriques AMD, BCG *celles dont la relation des coupées* AP, BK *aux appliquées* PM, KC, *ſe peut exprimer par une équation où il ne ſe rencontre point de differences ; & on prend pour* geométrique *tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on ſuppoſe ici que les coupées & les appliquées ſoient des lignes droites.*

Corollaire.

85. Lorsque la courbe donnée *AMD* eſt geométrique, il eſt clair que l'on pourra toûjours trouver (comme dans cet éxemple) une équation qui exprime la nature de

sa dévelopée *BCG*; & qu'ainsi cette dévelopée sera aussi geométrique. Mais je dis de plus qu'elle sera réctifiable, c'est-à-dire qu'on pourra trouver geométriquement des lignes droites égales à une de ses portions quelconque *BC*; car il est évident * que l'on déterminera avec le secours de la ligne *AMD*, qui est geométrique, sur la tangente *CM* de la portion *BC*, un point *M* tel que la droite *CM* ne différera de la portion *BC* que d'une droite donnée *AB*. * *Art.* 75.

EXEMPLE II.

86. SOIT la courbe donnée *MDM* une hyperbole entre ses asymptotes, qui ait pour équation $aa = xy$. FIG. 74.

On aura $\frac{aa}{y} = x$, $\frac{-aady}{yy} = dx$, & supposant dx constante, * $\frac{-aayyddy + 2aaydy^2}{y^4} = 0$; d'où l'on tire $ddy = \frac{2dy^2}{y}$; & mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, il vient * $ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$: de sorte que EC ou $PK = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces constructions. * *Art.* 1. * *Art.* 77.

Soit menée par le point *T* où la tangente *MT* rencontre l'asymptote *AB*, la ligne *TS* parallele à *MC* & qui rencontre *MP* prolongée en *S*; soit prise *ME* égale à la moitié de *MS* de l'autre côté de l'asymptote (que l'on regarde ici comme l'axe) parceque sa valeur est négative; ou bien soit prise *PK* égale à la moitié de *TQ* du même côté du point *T*: je dis que si l'on mene *EC* parallele ou *KC* perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite *MC* au point cherché *C*. Car il est clair que $MS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, & que $TQ = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention sur la figure de l'hyperbole *MDM*, on verra que sa dévelopée *CLC* doit avoir un point de rebroussement *L*, de même que la dévelopée de la parabole. Pour le determiner je remarque que le rayon *DL* de la dévelopée est plus petit que tout autre rayon

* *Art.* 78. MC; d'où il ſuit que la différence de ſon expreſſion*

* *Sect.* 3. $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-axady}$ ſera*nulle ou infinie. Ce qui donne, en prenant toûjours dx pour conſtante, $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}=0$ ou ∞; d'où en diviſant par $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$, & multipliant enſuite par $dxddy^2$, on tire cette équation $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=0$ ou ∞, qui ſervira à trouver pour x une valeur AH telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la dévelopée, le point L ſera le point de rebrouſſement cherché.

On a dans cet éxemple $y=\frac{aa}{x}$, $dy=\frac{-aadx}{xx}$, $ddy=\frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy=\frac{-6aadx^3}{x^4}$. C'eſt pourquoi mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $AH(x)=a$. D'où il ſuit que le point D eſt le ſommet de l'hyperbole, & que les lignes AD, DL ne font qu'une même droite AL qui en eſt l'axe.

EXEMPLE III.

FIG. 72. 74. 87. SOIT l'équation générale $y^m=x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1}dy=dx$ dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $\overline{mm-m}y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy=0$; & en diviſant par my^{m-1}, il vient $-ddy=\frac{\overline{m-1}dy^2}{y}$;

* *Art.* 77. d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on tirera* $ME=\frac{ydx^2+ydy^2}{\overline{m-1}dy^2}$; & partant EC ou $PK=\frac{ydy}{\overline{m-1}dx}+\frac{ydx}{\overline{m-1}dy}$. Ce qui donne ces conſtructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe AP, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre

MP prolongée au point *S*; ſoit priſe $ME = \frac{1}{m-1} MS$, ou bien ſoit priſe $PK = \frac{1}{m-1} TQ$: il eſt clair que ſi l'on mene par le point *E* une parallele, ou par le point *K* une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront *MC* au point cherché *C*.

Si *m* eſt négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de *ME* ſera négative; & par conſequent elles ſeront convexes vers leur axe qui ſera alors une aſymptote. Mais dans les paraboles où *m* eſt poſitif, il peut arriver deux cas. Car ou *m* ſera moindre que *1*, & alors elles ſeront convexes du côté de leur axe, qui ſera une tangente au ſommet: ou *m* ſurpaſſe *1*, & alors elles ſeront concaves vers leur axe qui ſera perpendiculaire au ſommet. FIG. 74. FIG. 75. FIG. 72.

Pour trouver dans ce dernier cas le point *B* où l'axe *AB* touche la dévelopée. On a $TQ \left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{y^{2-m}}{m}$; ce qui donne trois différens cas. Car ou $m = 2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'expoſant de *y* étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conſequent $AB = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du parametre. Ou *m* eſt moindre que *2*, & alors l'expoſant de *y* étant poſitif, elle ſe trouvera dans le numerateur, ce qui rend (en l'égalant* à zero) la fraction nulle: c'eſt-à-dire que le point *B* tombe en ce cas ſur le point *A* comme dans la ſeconde parabole cubique $axx = y^3$. Ou enfin *m* ſurpaſſe *2*, & alors l'expoſant de *y* étant négatif, elle ſera dans le dénominateur, ce qui rend (lorſqu'elle devient zero) la fraction infinie: c'eſt-à-dire que le point *B* eſt infiniment éloigné du point *A*, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe *AB* eſt aſymptote de la dévelopée comme dans la premiere parabole cubique $aax = y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la dévelopée *CLO* de la demi-parabole *ADM* a un point de rebrouſſement *L*; de ſorte que par le dévelopement de la partie *LO* continuée à l'infini, le point *D* ne décrit que la portion determinée *DA*; *Art. 83. FIG. 76. FIG. 77.

au lieu que par le dévelopement de l'autre partie LC continuée aussi à l'infini, il décrit la portion infinie DM.

On déterminera le point Z de même que dans l'hyperbole. Soit par éxemple $aax = y^3$ ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $dddy = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$; & ces valeurs étant substituées dans l'équation dx^2dddy

* Art. 86. $+ dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, on trouvera* $AH(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$. Il en est ainsi des autres.

REMARQUE.

88. En supposant que m surpasse 1, afin que les paraboles soient toûjours concaves du côté de leur axe, il peut arriver differens cas. Car si le numerateur de la fraction marquée par m est pair, & le dénominateur impair;

Fig. 73. toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire. Mais si le numerateur & dénominateur sont chacun impair; elles ont une position renversée de part & d'autre de leur axe, en sorte que leur sommet A est un point d'infléxion,

Fig. 77. xion, comme la premiere parabole cubique $x = y^{\frac{3}{1}}$ ou $aax = y^3$. Enfin si le numerateur étant impair, le dénominateur est pair; elles ont une position renversée du même côté de leur axe, en sorte que leur sommet A est

Fig. 76. un point de rebroussement, comme la seconde parabole cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela suit de ce qu'une puissance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela posé, il est évident,

Fig. 77. 1°. Que dans le point d'infléxion A, le rayon de la dévelopée peut être infiniment grand comme dans $aax = y^3$, ou infiniment petit comme dans $aax^3 = y^5$.

Fig. 76. 2°. Que dans le point de rebroussement A, le rayon de la dévelopée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^5$, ou zero comme dans $axx = y^3$.

3°. Qu'il ne s'ensuit pas de ce que le rayon de la developée est infini ou zero, que les courbes ayent alors un point d'infléxion ou de rebroussement. Car dans $a^3x = y^4$ il est infini, dans $ax^3 = y^4$ il est nul; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire. FIG. 73.

EXEMPLE IV.

89. SOIT la courbe *AMD* une hyperbole ou une ellipse qui ait pour axe *AH*(a), & pour parametre *AF*(b). FIG. 78. 79.

On aura par la proprieté de ces lignes $y = \frac{\sqrt{abx \mp bxx}}{\sqrt{a}}$, $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, & $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{\overline{4aabx \mp 4abxx}\sqrt{aabx \mp abxx}}$. Si donc l'on met ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ expression générale de* MC, on trouvera dans ces deux courbes MC *Art. 78.

$$= \frac{\overline{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb}$$

$= \frac{4MQ^3}{bb}$, puisque de part & d'autre $MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right)$ $= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour la parabole.

Soit prise *MC* quadruple de la quatriéme continuellement proportionnelle au parametre *AF* & à la perpendiculaire *MQ* terminée par l'axe; le point *C* sera à la developée.

Si l'on fait $x = 0$, on aura* $AB = \frac{1}{2}b$. Et si l'on fait dans l'ellipse $x = \frac{1}{2}a$, on trouvera $DG = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'est-à-dire égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipse la développée *BCG* se termine en un point *G* du petit axe *DO* où elle forme un point de rebroussement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini. *Art. 83. FIG. 79.

Si $a = b$ dans l'ellipſe, il vient $MC = \frac{1}{2}a$; d'où il ſuit que tous les rayons de la développée ſont égaux entr'eux, & qu'elle ne ſera par conſequent qu'un point : c'eſt-à-dire que l'ellipſe devient en ce cas un cercle qui a pour développée ſon centre. Ce que l'on ſçait d'ailleurs être veritable.

EXEMPLE V.

FIG. 80. 90. SOIT la courbe AMD une logarithmique ordinaire, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M la perpendiculaire MP ſur l'aſymptote KP, & la tangente MT; la ſoutangente PT ſoit toujours égale à la même droite donnée a.

On a donc $PT(\frac{ydx}{dy}) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $ddy = \frac{dydx}{a}$ $= \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME = \frac{-aa - yy}{y}$; & partant EC ou $PK = \frac{-aa - yy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

* Art. 77.

Soit priſe PK égale à TQ du même côté de T, parce que ſa valeur eſt negative ; & ſoit menée KC parallele à PM : je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire MC au point cherché C. Car $TQ = \frac{aa + yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M ſoit celui de la plus grande courbure, on ſe ſervira de la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, que l'on a trouvée * dans l'éxemple ſecond ; & mettant pour dy, ddy, $dddy$, leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera $PM(y) = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

* Art. 86.

Il eſt clair, en prenant dx pour conſtante, que les appliquées y ſont entr'elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il ſuit qu'elles font auſſi une progreſſion geométrique. Car ſi l'on conçoit que l'aſymptote ou l'axe PK ſoit diviſé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou MR, pf ou mS, fg ou nH, &c. compriſes entre les appli-

appliquées PM, pm, fn, go, &c. l'on aura $PM \,.\, pm :: Rm \,.\, Sn :: PM + Rm$ ou $pm \,.\, pm + Sn$ ou Fn. On prouve de même que $pm \,.\, fn :: fn \,.\, go$, & ainſi de ſuite. Les appliquées PM, pm, fn, go, &c. feront donc entr'elles une progreſſion geométrique.

EXEMPLE VI.

91. SOIT la courbe AMD une logarithmique ſpirale, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M au point fixe A, qui en eſt le centre, la droite MA & la tangente MT; l'angle AMT ſoit par tout le même. FIG. 81.

L'angle AMT ou AmM étant conſtant, la raiſon de mR (dy) à $RM(dx)$ ſera auſſi conſtante. Il faut donc que la difference de $\frac{dy}{dx}$ ſoit nulle; ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = o$. C'eſt pourquoi effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ expreſſion * générale de ME lorſque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve $ME = y$, c'eſt-à-dire $ME = AM$. Ce qui donne cette conſtruction. * Art. 77.

Soit menée AC perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe; le point C ſera à la dévelopée ACB.

Les angles AMT, ACM ſont égaux, puiſqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La dévelopée ACG ſera donc la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & elle n'en differera que par ſa poſition.

Si l'on ſuppoſe que le point C de la dévelopée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de ſon rayon en ce point, qui * eſt egal à la portion AC qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en A; il eſt clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire ſur AC. De ſorte que ſi l'on mene AT perpendiculaire ſur * Art. 75.

AM, la tangente *MT* sera aussi égale à la portion *AM* de la logarithmique spirale donnée *AMD*.

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées *AM*, *Am*, *An*, *Ao*, &c. qui fassent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il est clair que les triangles *MAm*, *mAn*, *nAo*, &c. seront semblables, puisque les angles en *A* sont égaux, & que par la proprieté de la logarithmique, les angles en *m*, *n*, *o*, &c. le sont aussi. Et partant *AM* . *Am* :: *Am*. *An*. Et *Am* . *An* :: *An* . *Ao*. & ainsi de suite. D'où l'on voit que les appliquées *AM*, *Am*, *An*, *Ao*, &c. font une progression geométrique lorsqu'elles font entr'elles des angles égaux.

EXEMPLE VII.

FIG. 82. 92. SOIT la courbe *AMD* une des spirales à l'infini, formée dans le secteur *BAD* avec une proprieté telle qu'ayant mené un rayon quelconque *AMP*, & ayant nommé l'arc entier *BPD*, b; sa partie *BP*, z; le rayon *AB* ou *AP*, a; & sa partie *AM*, y; on ait cette proportion $b . z :: a^m . y^m$.

L'équation à la spirale *AMD* est $y^m = \frac{a^m z}{b}$, dont la différence donne $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à cause des secteurs semblables *AMR*, *APp*, l'on aura $AM(y) . AP(a) :: MR (dx) . Pp(dz) = \frac{adx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$; d'où en divi-
*Art. 77. sant par my^{m-1}, l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant *ME** $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}dy^2}$; ce qui donne cette construction.

Soit menée par le centre *A* la droite *TAQ* perpendiculaire sur *AM*, & qui rencontre en *T* la tangente *MT*, & en *Q* la perpendiculaire *MQ*; soit fait $TA + \overline{m+1}AQ$.

$TQ :: MA . ME$. Je dis que menant EC parallele à TQ, elle ira rencontrer MQ en un point C qui sera à la developée.

Car à cause des paralleles MRG, TAQ, l'on aura $MR(dx) + \overline{m+1}RG(\frac{dy^2}{dx}) . MG(dx + \frac{dy^2}{dx}) :: TA + \overline{m+1}AQ . TQ :: AM(y) . ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}dy^2}$.

EXEMPLE VIII.

93. SOIT AMD une demi-roulette simple, dont la base BD est égale à la demi-circonférence BEA du cercle générateur. FIG. 83.

Ayant nommé AP, x; PM, y; l'arc AE, u; & le diametre AB, $2a$; l'on aura par la proprieté du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en supposant dx constante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$; & en mettant ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, il vient * $MC = 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'est-à-dire $2BE$ ou $2MG$. *Art. 78.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura $AN = 4a$ pour rayon de la dévelopée dans le sommet A. Mais si l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la dévelopée au point D devient nul ou zero; d'où l'on voit que la developée a son origine en D, & qu'elle se termine en N en sorte que $BN = BA$.

Pour sçavoir la nature de cette dévelopée, il n'y a qu'à achever le réctangle BS, décrire le demi cercle DIS qui a pour diametre DS, & mener DI parallele à MC ou à BE. Cela fait, il est clair que l'angle BDI est égal à l'angle EBD; & par consequent que les arcs DI, BE sont égaux entr'eux; d'où il suit que leurs cordes DI, BE ou GC sont

aussi égales. Si donc l'on fait IC, elle sera égale & parallele à DG, qui par la génération de la roulette est egale à l'arc BE ou DI; & partant la dévelopée DCN est une demi-roulette qui a pour base la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de son cercle générateur : c'est-à-dire que c'est la demi-roulette même $AMDB$ posée dans une situation renversée.

COROLLAIRE.

94. IL est clair *que la portion de roulette DC est double de sa tangente CG, ou de la corde correspondante DI. Et la demi roulette DCN double du diametre BN ou DS de son cercle générateur.

*Art. 75.

AUTRE SOLUTION.

95. ON peut encore trouver la longueur du rayon MC sans aucun calcul, en cette sorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiére, une autre parallele me, une autre corde Be, & décrit des centres C, B les petits arcs GH, EF, on formera les triangles réctangles GHg, EFe qui seront égaux & semblables; car $Gg = Ee$, puisque BG ou ME est égal à l'arc AE, & de même Bg ou me est égal à l'arc Ae; de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou $Be - BE$; GH sera donc égal à EF. Or les perpendiculaires MC, mC, étant paralleles aux cordes EB, eB, l'angle MCm sera égal à l'angle EBe. Donc puisque les arcs GH, EF, qui mesurent ces angles, sont égaux, il s'ensuit que leurs rayons CG, BE seront aussi égaux; & partant que MC doit être prise double de MG ou de BE.

LEMME.

96. S'IL *y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. soit que ce nombre soit fini ou infini, soit que ces quantités soient des lignes, ou des surfaces, ou des solides; la somme* a − b + b − c + c − d + d − e, *&c. de toutes leurs différences est égale à la plus grande* a, *moins la plus*

petite e, *ou ſimplement à la plus grande lorſque la plus petite eſt zero.* Ce qui eſt viſible.

COROLLAIRE I.

97. Les ſécteurs *CMm*, *CGH*, étant ſemblables, il eſt clair que *Mm* eſt double de *GH* ou de ſon égale *EF*; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point *M*, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits arcs *Mm*, c'eſt-à-dire la portion *Am* de la demi-roulette *AMD*, eſt double de la ſomme de tous les petits arcs *EF*. Or le petit arc *EF* fait partie de la corde *AE* perpendiculaire ſur *BE*, & eſt la différence des cordes *AE*, *Ae*, parceque la petite droite *eF* perpendiculaire ſur *Ae* peut être conſiderée comme un petit arc décrit du centre *A*; & partant la ſomme de tous les petits arcs *EF* dans l'arc *AZE* ſera la ſomme des différences de toutes les cordes *AE*, *Ae*, &c. dans cet arc, c'eſt-à-dire par le Lemme qu'elle ſera égale à la corde *AE*. Il eſt donc évident que la portion *AM* de la demi-roulette *AMD* eſt double de la corde correſpondante *AE*.

COROLLAIRE II.

98. L'ESPACE *MGgm* * ou le trapéze *MGHm* $= \overline{\tfrac{1}{2}Mm + \tfrac{1}{2}GH} \times MG = \tfrac{3}{2}EF \times BE$, c'eſt à dire qu'il eſt triple du triangle *EBF* ou *EBe*; d'où il ſuit que l'eſpace *MGBA* ſomme de tous ces trapézes, eſt triple de l'eſpace circulaire *BEZA* ſomme de tous ces triangles. *Art. 2.

EXEMPLE III.

99. NOMMANT *BP*, *z*; l'arc *AZE* ou *EM* ou *BG*, *u*; & le rayon *KA*, *a*; l'on aura le parallelélogramme *MGBE* $= uz$. Or l'eſpace de la roulette $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \tfrac{3}{2}au$; & partant l'eſpace *AMEB* renfermé par la portion de roulette *AM*, la parallele *ME*, la corde *BE* & le diametre *AB*, eſt $= 3EKB + \tfrac{3}{2}au - uz$. D'où il

ſuit que ſi l'on prend $BP(z) = \frac{3}{2}a$, l'eſpace *AMEB* ſera triple du triangle correſpondant *EKB*; & aura par conſéquent ſa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que M. *Hugens* a remarqué le premier. Voici encore une autre ſorte d'eſpace qui a la même proprieté.

Si l'on retranche de l'eſpace *AMEB* le ſegment *BEZA*, il reſtera l'eſpace $AZEM = 2EKB + au - uz$; d'où l'on voit que ſi le point *P* tombe au centre *K*, l'eſpace *AZEM* ſera égal au quarré du rayon. Il eſt évident qu'entre tous les eſpaces *AMEB* & *AZEM*, il n'y a que les deux que l'on vient de déterminer qui ayent leur quadrature abſoluë indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

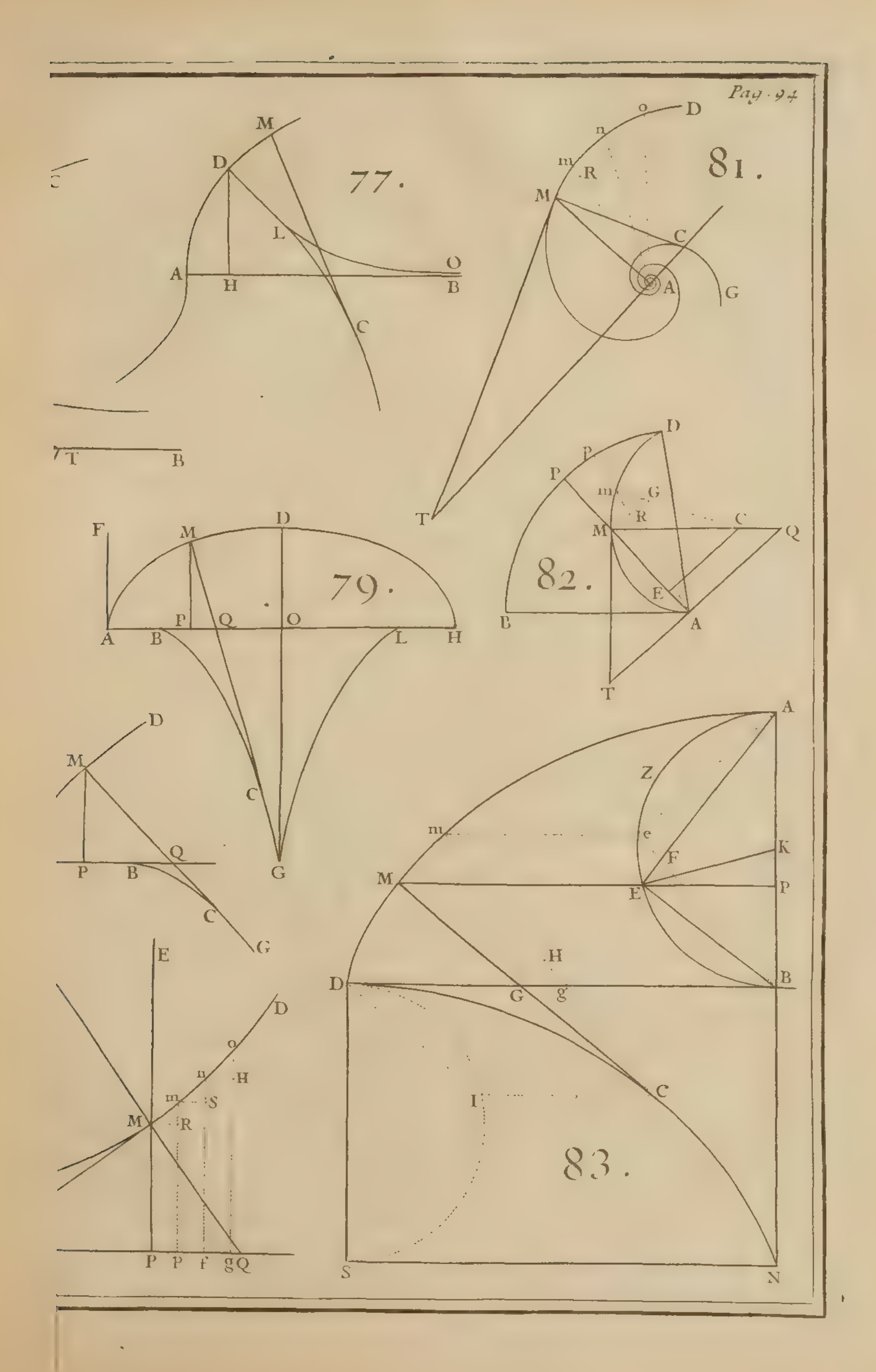
Fig. 84. 100. SOIT la demi-roulette *AMD* décrite par la révolution du demi cercle *AEB* autour d'un autre cercle immobile *BGD*; & qu'il faille determiner ſur la perpendiculaire *MG* donnée de poſition, le point où elle touche la dévelopée.

Pour ſe ſervir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe *AMD*, des lignes droites perpendiculaires ſur l'axe *OA*, & chercher enſuite une équation qui exprimât la relation des coupées aux appliquées, ou de leurs differences. Mais comme le calcul en ſeroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces ſortes de rencontres en tenter la ſolution en ſe ſervant de la génération même.

Lorſque le demi-cercle *AEB* eſt parvenu dans la poſition *MGB* dans laquelle il touche en *G* la baſe *BD*; & que le point décrivant *A* tombe ſur le point *M* de la demi-roulette *AMD*: il eſt clair,

1°. Que l'arc *GM* eſt égal à l'arc *GD*, comme auſſi l'arc *GB* du cercle mobile à l'arc *GB* du cercle immobile.

*Art. 43. 2°. Que *MG* eſt * perpendiculaire ſur la courbe; car conſidérant la demi-circonférence *MGB* ou *AEB*, & la baſe *BGD* comme l'aſſemblage d'une infinité de petites


77.
M
D
L
A
H
O
B
C
T
B
81.
o
D
n
m
R
M
C
A
G
T
79.
F
M
D
P
Q
O
A
B
L
H
C
G
82.
D
p
P
m
G
R
C
M
Q
E
B
A
T
M
D
Q
P
B
C
G
A
Z
m
e
K
F
M
E
P
H
B
D
G
g
C
I
83.
S
N
E
D
o
n
H
m
S
M
R
P
p
f
g
Q

droites égales chacune à ſa correſpondante, il eſt manifeſte que la demi-roulette *AMD* ſera l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centres ſucceſſivement tous les points touchans *G*, & qui ſeront décrits chacun par le même point *M* ou *A*.

3°. Que ſi l'on décrit du centre *O* du cercle immobile l'arc concentrique *ME*; les arcs *MG*, *EB* du cercle mobile ſeront égaux entr'eux, auſſi bien que leurs cordes *MG*, *EB* & les angles *OGM*, *OBE*. Car les droites *OK*, *OK* qui joignent les centres des deux cercles ſont égales, puiſqu'elles paſſent par les points touchans *B*, *G*; c'eſt pourquoi menant les rayons *OM*, *OE*, & *KE*, on formera les triangles *OKM*, *OKE* égaux & ſemblables. L'angle *OKM* étant donc égal à l'angle *OKE*; les arcs *MG*, *BE* des demi-cercles égaux *MGB*, *BEA*, qui meſurent ces angles, ſeront égaux, comme auſſi leurs cordes *MG*, *EB*; d'où il ſuit que les angles *OGM*, *OBE* le ſeront auſſi.

Cela poſé, ſoit entenduë une autre perpendiculaire *mC* infiniment proche de la premiere, un autre arc concentrique *me*, & une autre corde *Be*; ſoient décrits des centres *C*, *B*, les petits arcs *GH*, *EF*. Les triangles réctangles *GHg*, *EFe* ſeront égaux & ſemblables; car *Gg* ou *Dg* — *DG* = *Ee* ou à l'arc *Be* — l'arc *BE*, de plus *Hg* ou *mg* — *MG* = *Fe* ou à *Be* — *BE*. Le petit arc *GH* ſera donc égal au petit arc *EF*; d'où il ſuit que l'angle *GCH* eſt à l'angle *EBF*, comme *BE* eſt à *CG*. Ainſi toute la difficulte ſe réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui ſe fait en cette ſorte. Fig. 85.

Ayant mené les rayons *OG*, *Og*, *KE*, *Ke*, & nommé *OG* ou *OB*, *b*; *KE* ou *KB* ou *KA*, *a*; il eſt clair que l'angle *EBe* $= OBe - OBE = Ogm - OGM =$ (en menant *GL*, *GV* paralleles à *Cm*, *Og*) $LGM - OGV = GCH - GOg$. On aura donc l'angle $GCH = GOg + EBF$. Or les arcs *Gg*, *Ee* étant égaux, l'on aura auſſi $GOg . EKe$ ou $2EBF :: KE(a) . OG(b)$; & partant l'angle $GOg = \frac{2a}{b} EBF$, & $GCH = \frac{2a+b}{b} EBF$. Donc $GCH . EBF$ ou $BE . CG :: \frac{2a+b}{b} . 1$.

& partant l'inconnue $CG = \frac{b}{2a+b} BE$ ou MG. Ce qui donne cette construction.

Fig. 86. Soit fait $OA(2a+b).OB(b)::MG.GC$; le point C sera à la developée.

Il est clair 1°. Que cette dévelopée commence au point D, & qu'elle y touche la base BGD; puisque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle se termine au point N, en sorte que $OA.OB::AB.BN::OA-AB$ ou OB $OB-BN$ ou ON; c'est-à-dire que OA, OB, ON sont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on decrit à présent le cercle NSQ du centre O, je dis que la dévelopée DCN est formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diametre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ: c'est à dire qu'elle est une demi-roulette semblable à la proposée, ou de même espece (parceque les diametres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & posée dans une situation renversée en sorte que son sommet est en D. Pour le prouver, supposons que les diametres des cercles mobiles se trouvent sur la droite OT menée à discrétion du centre O; elle passera par les points touchans S, G; & faisant AB ou $TG.BN$ ou $GS::MG.GC$, le point C sera à la dévelopée, & de plus à la circonférence du cercle GCS; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le sera aussi. Or à cause des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB est à l'arc CS, comme le diametre GT au diametre $GS::OG.OS::GB.NS$; & partant les arcs CS, SN sont égaux. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

*Art. 75. 101. Il est clair * que la portion de roulette DC est égale à la droite CM; & partant que DC est à sa tangente CG $::AB+BN.BN::OB+ON.ON$; c'est à dire comme la somme des diametres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, est au rayon du cercle immobile. Cette verité se découvre encore de la maniére

niére qui ſuit. A cauſe des triangles ſemblables CMm, CGH, Fig. 85.
l'on aura $Mm . GH$ ou $EF :: MC . GC :: OA + OB\ (2a+2b) . OB\ (b)$. D'où il ſuit (comme dans l'art. 97.) que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante AE, comme la ſomme des diametres du cercle générateur & de la baſe, eſt au rayon de la baſe.

COROLLAIRE II.

102. LE trapéze $MGHm = \overline{\tfrac{1}{2} GH + \tfrac{1}{2} Mm} \times MG$. Or Fig. 85.
$CG\left(\frac{b}{2a+b} MG\right) . CM\left(\frac{2a+2b}{2a+b} MG\right) :: GH . Mm = \frac{2a+2b}{b} GH$. Donc puiſque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{2a+3b}{2b} EF \times EB$: c'eſt à dire que le trapéze $MGHm$ ſera toujours au triangle correſpondant $EBF :: 2a + 3b . b$.

D'où il ſuit que l'eſpace $MGBA$ renfermé par MG, AB perpendiculaires à la roulette, par l'arc BG & par la portion de roulette MA, eſt au ſegment de cercle correſpondant $BEZA :: 2a + 3b . b$.

COROLLAIRE III.

103. IL eſt viſible que la quadrature indéfinie de la rou- Fig. 87.
lette dépend de la quadrature du cercle ; mais ſi l'on prend OQ moyenne proportionnelle entre OK, OA, & qu'on décrive de ce rayon l'arc QEM ; je dis que l'eſpace $ABEM$ renfermé par le diametre AB, la corde BE, l'arc EM, & par la portion de roulette AM, eſt au triangle $EKB :: 2a + 3b . b$. Car nommant l'arc AE ou GB, u ; le rayon OQ, z ; l'on aura $OB\ (b) . OQ\ (z) :: GB\ (u) . RQ$ ou $ME = \frac{uz}{b}$. & partant l'eſpace $RGBQ$ ou $MGBE$,
c'eſt à dire $\overline{\tfrac{1}{2} GB + \tfrac{1}{2} RQ} \times BQ = \frac{zzu - bbu}{2b}$. Or * l'eſpace de * Art. 102.
la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} \times BEZA = \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA \left(\frac{au}{2}\right)$. Si donc l'on retranche le précédent eſpace de celui-ci, il reſtera $ABEM = \frac{2aau + 3abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB$

$= \frac{2a+3b}{b}$ EKB, puiſque par la conſtruction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet eſpace a ſa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il eſt le ſeul parmi tous ſes ſemblables.

En voici encore un autre qui a la même proprieté. Si l'on retranche de l'eſpace $ABEM$ le ſegment $BEZA$ ($\frac{1}{2}au + EKB$), il reſtera l'eſpace $AZEM = \frac{2aau+2abu+bbu-zzu}{2b} + \frac{2a+2b}{b}EKB = \frac{2a+2b}{b}EKB$ en faiſant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'eſt à dire que ſi l'on diviſe la demi-circonférence en deux également au point E, l'eſpace $AZEM$ ſera au double du triangle EKB, c'eſt à dire au quarré du rayon $:: OK\ (a+b) . OB\ (b)$.

COROLLAIRE IV.

Fig. 88. 104. Si le cercle mobile AEB roule au dedans de l'immobile BGD, ſon diametre AB devient négatif de poſitif qu'il étoit auparavant; & partant il faut changer de ſignes les termes où il ſe rencontre avec une dimenſion impaire. D'où il ſuit, 1°. Que ſi l'on mene à diſcrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on faſſe OA
* Art. 100. $(b-2a) . OB\ (b) :: MG . GC$. le point C ſera* à la dévelopée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diametre BN, au dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que ſi l'on décrit du centre O l'arc ME,
* Art. 101. la portion de roulette AM ſera* à la corde $AE :: 2b-2a . b$.
* Art. 102. 3°. Que l'eſpace $MGBA$ eſt* au ſegment $BEZA :: 3b-2a . b$. 4°. Que ſi l'on prend $OQ = \sqrt{2aa-3ab+bb}$, c'eſt à dire moyenne proportionnelle entre OK, OA; l'eſpace $ABEM$ renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la cor-
* Art. 103. de EB, & le diametre AB, ſera* au triangle $EKB :: 3b-2a . b$. Mais que ſi l'on fait OQ ou $OE = \sqrt{2aa-2ab+bb}$, c'eſt à dire que l'arc AE ſoit le quart de la circonférence; l'eſpace $AZEM$ renfermé par la portion AM de roulette &
* Ibid. par les deux arcs ME, AE, ſera* au triangle EKB qui eſt en ce cas la moitié du quarré du rayon $:: 2b-2a . b$.

COROLLAIRE V.

105. Si l'on conçoit que le rayon OB du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diametre AB du cercle mobile est nul par rapport à celui de l'immobile; il s'ensuit, 1°. Que $MG.GC :: b.b.$ Puisque $b \pm 2a = b$, c'est à dire que $MG = GC$; & partant que si l'on prend $BN = AB$, & qu'on mene la droite NS parallele à BD, la dévelopée DCN sera formée par la révolution du cercle, qui a pour diametre BN, sur la base NS. 2°. Que la portion de roulette AM est à la corde correspondante $AE :: 2b.b.$ 3°. Que l'espace $MGBA$ est au segment $BEZA :: 3b.b.$ 4°. Puisque BQ, ou $\pm OQ \mp OB$, que j'apelle x, est $= \mp b \pm \sqrt{2aa \mp 3ab + bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommensurables) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; l'on aura $x = \frac{3}{2}a$, en effaçant les termes où b ne se rencontre point, parcequ'ils sont nuls par rapport aux autres. C'est à dire que si l'on prend dans la roulette ordinaire $BP = \frac{1}{4}AB$, & qu'on mene la droite PEM parallele à la base BD; l'espace $AMEB$ sera triple du triangle EKB On trouvera en opérant de la même maniere, que si le point P tombe au centre K, l'espace $AZEM$ renfermé par la portion de roulette AM, la droite ME, & l'arc AE, sera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déja démontré ci devant art. 99.

Fig. 86. 88. Fig. 85. 88. Fig. 87. 88. Fig. 85.

REMARQUE.

106. Comme les arcs DG, GM sont toujours égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle DOG est aussi toujours à l'angle $GKM :: GK.OG.$ C'est pourquoi l'origine D de la roulette DMA, les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point M qui décrit la roulette, il ne faut que Fig. 84.



tirer le rayon *KM* en ſorte que l'angle *GKM* ſoit à l'angle donné *DOG* :: *OG* . *GK*. Or je dis maintenant que cela ſe peut toujours faire géometriquement lorſque le rapport de ces rayons ſe peut exprimer par nombres ; & partant que la roulette *DMA* eſt alors géométrique.

Car ſuppoſant, par éxemple, que *OG* . *GK* :: *13* . *5* ; il eſt clair que l'angle *MKG* doit contenir deux fois l'angle donné *DOG* & de plus $\frac{3}{5}$ de cet angle. Toute la difficulté ſe réduit donc à diviſer l'angle *DOG* en cinq parties égales. Or c'eſt une choſe connue par les Geométres, qu'on peut toujours diviſer geométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra ; puiſqu'on arrive toujours à quelque equation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette *DMA* eſt mécanique, ou ce qui eſt la même choſe, qu'on ne peut déterminer geométriquement ſes points *M* lorſque la raiſon de *OG* à *KG* ne ſe peut exprimer par nombres, c'eſt à dire lorſqu'elle eſt ſourde.

Car toute ligne, ſoit mécanique ſoit geométrique, où
Fig. 89. rentre en elle-même ou s'etend à l'infini ; puiſqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile *ABC* décrit par ſon point *A* dans ſa premiere révolution la roulette *ADE*, cette roulette ne ſera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la ſeconde *EFG*, puis la troiſiéme *GHI*, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que le point décrivant *A* retombe après pluſieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors ſi on recommence à rouler le cercle mobile *ABC*, il décrira derechef la même ligne courbe, de ſorte que toutes ces roulettes priſes enſemble ne compoſent qu'une ſeule courbe *ADEFGHI*, &c. Or les rayons des cercles, générateurs étant incommenſurables, leurs circonférences le ſeront auſſi ; & par conſéquent le point décrivant *A* du cercle mobile *ABC* ne pourra jamais retomber dans le point *A* de l'immobile, d'où il étoit parti, ſi grand que

puiſſe être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe *ADEFGHI*, &c. Maintenant ſi l'on mene au travers du cercle immobile une ligne droite indefinie, il eſt clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinite de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne geométrique doit avoir au moins autant de dimenſions que cette ligne peut être coupée en de différens points par une droite; il s'enſuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimenſions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou tranſcendente.

PROPOSITION III.

Problême.

107. LA *ligne courbe* BFC *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle ſoit la dévelopée commune.* FIG. 90.

Si l'on dévelope la courbe *BFC* en commençant par le point *A*, il eſt clair que tous les points *A*, *B*, *F*, du fil *ABFC* décriront dans ce mouvement des lignes courbes *AM*, *BN*, *FO*, qui auront toutes pour dévelopée commune la courbe donnée *BFC*. Mais il faut obſerver que la ligne *FO* n'ayant pour dévelopée que la partie *FC*, ſon origine n'eſt pas en *F*; & que pour la trouver, il faut déveloper la partie reſtante *BF* en commençant au point *F* pour décrire la portion *EF* de la courbe *EFO* dont l'origine eſt en *E*, & qui a pour dévelopée la courbe entiére *BFC*.

Si l'on veut trouver les points *M*, *N*, *O* ſans ſe ſervir du fil *ABFC*, il n'y a qu'à prendre ſur une tangente quelconque *CM* autre que *BA*, les parties *CM*, *CN*, *CO* égales à *ABFC*, *BFC*, *EC*.

COROLLAIRE.

108. IL eſt évident, 1°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ſont d'une nature très differente entr'elles; puiſque la courbe *AM* a dans ſon ſommet *A* le rayon de ſa dévelopée égal à *AB*, au lieu que celui de la courbe *BN* eſt nul. Il eſt viſible auſſi par la figure même de la courbe *EFO* qu'elle eſt très différente des courbes *AM*, *BN*.

2°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ne ſont geométriques que lorſque la donnée *BFC* eſt geométrique & de plus rectifiable. Car ſi elle n'eſt pas geométrique, en prenant *BK* pour la coupée, on ne trouvera point geométriquement l'appliquée *KC*: & ſi elle n'eſt pas rectifiable, ayant mené la tangente *CM*, on ne pourra déterminer geométriquement les points *M*, *N*, *O* des courbes *AM*, *BN*, *EFO*; puiſqu'on ne peut trouver geométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe *BFC*, & à ſes portions *BF*, *FC*.

REMARQUE.

FIG. 91. 109. SI l'on dévelope une ligne courbe *BAC* qui ait un point d'inflexion en *A*, en commençant par le point *D* autre que le point d'inflexion; on formera par le dévelopement de la partie *BAD* la partie *DEF*; & par celui de la partie *DC*, la partie reſtante *DG*: de ſorte que *FEDG* ſera la courbe entiere formée par le dévelopement de *BAC*. Or il eſt viſible que cette courbe rebrouſſe chemin aux points *D* & *F*, avec cette difference qu'au point de rebrouſſement *D* les parties *DE*, *DG* ont leur convexité oppoſée l'une à l'autre; au lieu qu'au point *E* les parties *DE*, *EF* ſont concaves vers le même côté. On a enſeigné dans la ſection précedente à trouver les points de rebrouſſement tels que *D*: il eſt queſtion maintenant de déterminer les points *E*, qu'on peut appeller points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte, & que perſonne, que je ſçache, n'a encore conſideré.

Pour en venir à bout, on menera à diſcretion ſur la

partie DE deux perpendiculaires MN, mn, terminées par la dévelopée aux points N, n, par lesquels on tirera deux autres perpendiculaires NH, nH sur les premieres NM, nm; ce qui formera deux petits secteurs MNm, NHn qui seront semblables, puisque les angles MNm, NHn sont égaux. On aura donc $Nn . Mm :: NH . NM$. Or dans le point d'infléxion A le rayon NH devient * infini ou zero; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebroussement E de la seconde sorte, la raison de la différence Nn du rayon MN de la dévelopée, à la différence Mm de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant * *Art.* 81.

puisque * $Nn = \frac{-3dxdyddy^2 \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$, & * *Art.* 86.

$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2}{dxddy^2} = 0$ ou ∞; & multipliant par $dxddy^2$, on trouvera la formule $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$ ou ∞, qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

On peut encore concevoir qu'une rebroussante DEF ou $HDEFG$ de la seconde sorte, ait pour dévelopée une autre rebroussante BAC de la seconde sorte, telle que son point de rebroussement A réponde au point de rebroussement E, c'est à dire qu'il soit situé sur le rayon de la dévelopée qui part du point E. Or il est clair dans cette supposition, que le rayon EA de la dévelopée sera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la FIG. 92. 93.

différence de $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ expression générale * des rayons de la dévelopée, doit être nulle ou infinie au point cherché E; ce qui donne la même formule qu'auparavant: de sorte qu'elle est générale pour trouver les points de rebroussement de la seconde sorte. * *Art.* 78.

SECTION VI.

Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfléxion.

DE'FINITION.

FIG. 94. 95. SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, qui partent d'un point lumineux B, se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en sorte que les angles de réfléxion soient égaux aux angles d'incidence; la ligne HFN, que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongemens AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réfléxion.*

COROLLAIRE I.

FIG. 94. 110. Si l'on prolonge HA en I, de sorte que $AI = AB$, & que l'on develope la caustique HFN en commençant au point I; on décrira la courbe ILK telle que la tangente FL sera * continuellement égale à la portion FH de la caustique plus à la droite HI. Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi Bm, mF infiniment près de BM, MF, & qu'ayant prolongé Fm en l, on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR: on formera les petits triangles réctangles MOm, MRm, qui seront semblables & egaux; car puisque l'angle $OmM = FmD = RmM$, & que de plus l'hypotenuse Mm est commune, les petits cotés Om, Rm seront égaux entr'eux. Or puisque Om est la différence de LM, & Rm celle de BM, & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M; il s'ensuit que $ML - IA$ ou $AH + HF - MF$ somme * de toutes les différences Om dans la portion de courbe AM, est $= BM - BA$ somme * de toutes les differences Rm dans la même portion AM. Donc la portion HF de la caustique HFN sera égale à $BM - BA + MF - AH$.

*Art. 75. *Art. 96. *Art. 96.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le

réfléchi

réfléchi AH dévelope ou envelope la portion HF pour parvenir en MF: mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la difference des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il dévelope avant que de tomber sur l'autre. Par éxemple, $BM - BA = MF + FH - AH$; d'où l'on tire $FH = BM - BA + AH - MF$. FIG. 95.

Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle AP; il est clair que PM sera la différence des rayons incidens BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons. FIG. 94. 95. FIG. 96.

COROLLAIRE II.

111. Si l'on conçoit que la figure $BAMD$ soit renversée sur le même plan, en sorte que le point B tombe sur le point I, & qu'ainsi la tangente en A de la courbe AMD dans sa premiere situation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on fasse rouler la courbe aMd sur AMD, c'est à dire sur elle-même, en sorte que les portions aM, AM soient toujours égales : je dis que le point B décrira dans ce mouvement une espece de roulette ILK qui aura pour dévelopée la caustique HFN. FIG. 94.

Car il suit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée du point décrivant L au point touchant M sera * perpendiculaire à la courbe ILK. 2°. Que La ou $IA = BA$, & $LM = BM$. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM sur la tangente commune en M sont égaux; & partant que si l'on prolonge LM en F, le rayon MF sera le réfléchi de l'incident BM. D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la caustique HFN: & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point L, il s'ensuit que la courbe ILK est formée par le dévelopement de la caustique HFN, plus la droite HI. *Art. 43.

Il suit de ceci que la portion FH ou $FL - HI = BM$

$+MF-BA-AH$. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre maniére dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM; il eſt clair que le point touchant N, & celui d'interſection V ſe confondront avec l'autre point touchant F: de ſorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la cauſtique HFN, il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF, mF. Et en effet, ſi l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les interſections des réfléchis un poligone d'une infinité de côtés dont l'aſſemblage compoſera la cauſtique HFN.

PROPOSITION I.

Problême général.

FIG. 97. 113. LA *nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver ſur le réfléchi* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique.*

Ayant trouvé par la ſection précédente la longueur MC du rayon de la dévelopée au point M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg ſur les rayons incidens & réfléchis; enſuite on nommera les données BM, y; ME ou MG, a.

Cela poſé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier*, que les triangles MRm, MOm ſont ſemblables & égaux; & qu'ainſi $MR=MO$. Or à cauſe de l'égalité des angles d'incidence & de réfléxion, l'on a auſſi $CE=CG$, $Ce=Cg$; & partant $CE-Ce$ ou $EQ=CG-Cg$ ou SG. Donc à cauſe des triangles ſemblables BMR & BEQ, FMO & FGS, l'on aura $BM+BE\ (2y-a).\ BM\ (y) :: MR+EQ$

* Art. 110.

ou $MO + GS . MR$ ou $MO :: MG (a) . MF = \frac{ay}{2y - a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M, ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit, & l'on auroit par conséquent $MF = \frac{-ay}{-2y - a}$ ou $\frac{ay}{2y + a}$.

Si l'on suppose que y devienne infinie, c'est à dire que le point B soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{1}{2}a$, parceque a est nulle par rapport à $2y$. FIG. 96.

COROLLAIRE I.

114. COMME l'on ne trouve pour MF qu'une seule valeur dans laquelle entre le rayon de la dévelopée; il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule caustique HFN par réfléxion, puisqu'elle* n'a qu'une seule dévelopée. FIG. 94. 95. *Art. 80.

COROLLAIRE II.

115. LORSQUE AMD est géométrique, il est clair* que sa dévelopée l'est aussi, c'est à dire que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il suit que tous les points F de sa caustique seront aussi déterminés géométriquement, c'est à dire que la caustique HFN sera géométrique. Mais je dis de plus, que cette caustique sera toujours réctifiable; puisqu'il est évident* que l'on peut trouver avec le secours de la courbe AMD, qu'on suppose géométrique, des lignes droites égales à une de ses portions quelconque. *Art. 85. FIG. 97. FIG. 94. 95. *Art. 110.

COROLLAIRE III.

116. SI la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B; la valeur de MF $\left(\frac{ay}{2y + a}\right)$ sera toujours positive; & il faudra prendre par conséquent le point F du FIG. 97.

côté du point C, par rapport au point M, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront divergens.

Mais ſi la courbe AMD eſt concave vers le point lumineux B, la valeur de MF $(\frac{ay}{2y-a})$ ſera poſitive lorſque y ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$, négative lorſqu'il eſt moindre, & infinie lorſqu'il eſt égal. D'où il ſuit que ſi l'on décrit un cercle qui ait pour diamétre la moitié du rayon MC de la dévelopée, les rayons réfléchis infiniment proches ſeront convergens lorſque le point lumineux B tombe au dehors de ſa circonférence, divergens lorſqu'il tombe au dedans, & enfin paralleles lorſqu'il tombe deſſus.

COROLLAIRE IV.

117. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura $ME\ (a) = o$; & partant $MF = o$. Or comme le rayon réflechi eſt alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la cauſtique conſiſte à toucher tous les rayons réfléchis; il s'enſuit qu'elle touchera auſſi le rayon incident BM au point M: c'eſt à dire que la cauſtique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur ſera commun.

Si le rayon MC de la dévelopée eſt nul, on aura encore $ME\ (a) = o$; & partant $MF = o$. D'où l'on voit que la donnée & la cauſtique font entr'elles dans le point M qui leur eſt commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la dévelopée eſt infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura $MF = \mp y$; puiſque $ME\ (a)$ étant infinie, y ſera nul par rapport à a. Or comme cette valeur eſt négative lorſque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD, & poſitive lorſqu'il tombe du côté oppoſé; il s'enſuit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront toujours divergens lorſque la ligne AMD eſt droite.

COROLLAIRE V.

118. IL eſt évident que deux quelconques des trois points *B*, *C*, *F*, étant donnés, on trouvera facilement le troiſiéme.

Soit, 1°, la courbe *AMD* une parabole qui ait pour foyer le point lumineux *B*. Il eſt clair par les élémens des ſéctions coniques, que tous les rayons réfléchis ſeront paralleles à l'axe ; & partant que *MF* ſera toujours infinie en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point *M*. On aura donc $a = 2y$: d'où il ſuit que ſi l'on prend *ME* double de *MB*, & qu'on mene la perpendiculaire *EC* ; elle ira couper *MC* perpendiculaire à la courbe *AMD*, en un point *C* qui ſera à la dévelopée de cette courbe. FIG. 98.

Soit 2°. la courbe *AMD* une ellipſe qui ait pour un de ſes foyers le point lumineux *B*. Il eſt encore clair que tous les rayons réfléchis *MF* ſe rencontreront dans un même point *F* qui ſera l'autre foyer. Et ſi l'on nomme *MF*, z ; l'on aura* $z = \frac{ay}{2y - a}$; d'où l'on tire la cherchée $ME (a) = \frac{2yz}{y + z}$. Mais ſi la courbe *AMD* eſt une hyperbole, le foyer *F* tombera de l'autre côté ; & partant $MF (z)$ deviendra négative : d'où il ſuit qu'on aura alors $ME (a) = \frac{-2yz}{y - z}$ ou $\frac{2yz}{z - y}$. Ce qui donne cette conſtruction qui ſert auſſi pour l'ellipſe. FIG. 99. *Art. 113. FIG. 110.

Soit priſe *ME* quatriéme proportionnelle au demi-axe traverſant, & aux rayons incident & réfléchi ; ſoit menée la perpendiculaire *EC* : elle ira couper la ligne *MC* perpendiculaire à la ſéction, en un point *C* qui ſera à la dévelopée. FIG. 99. 100.

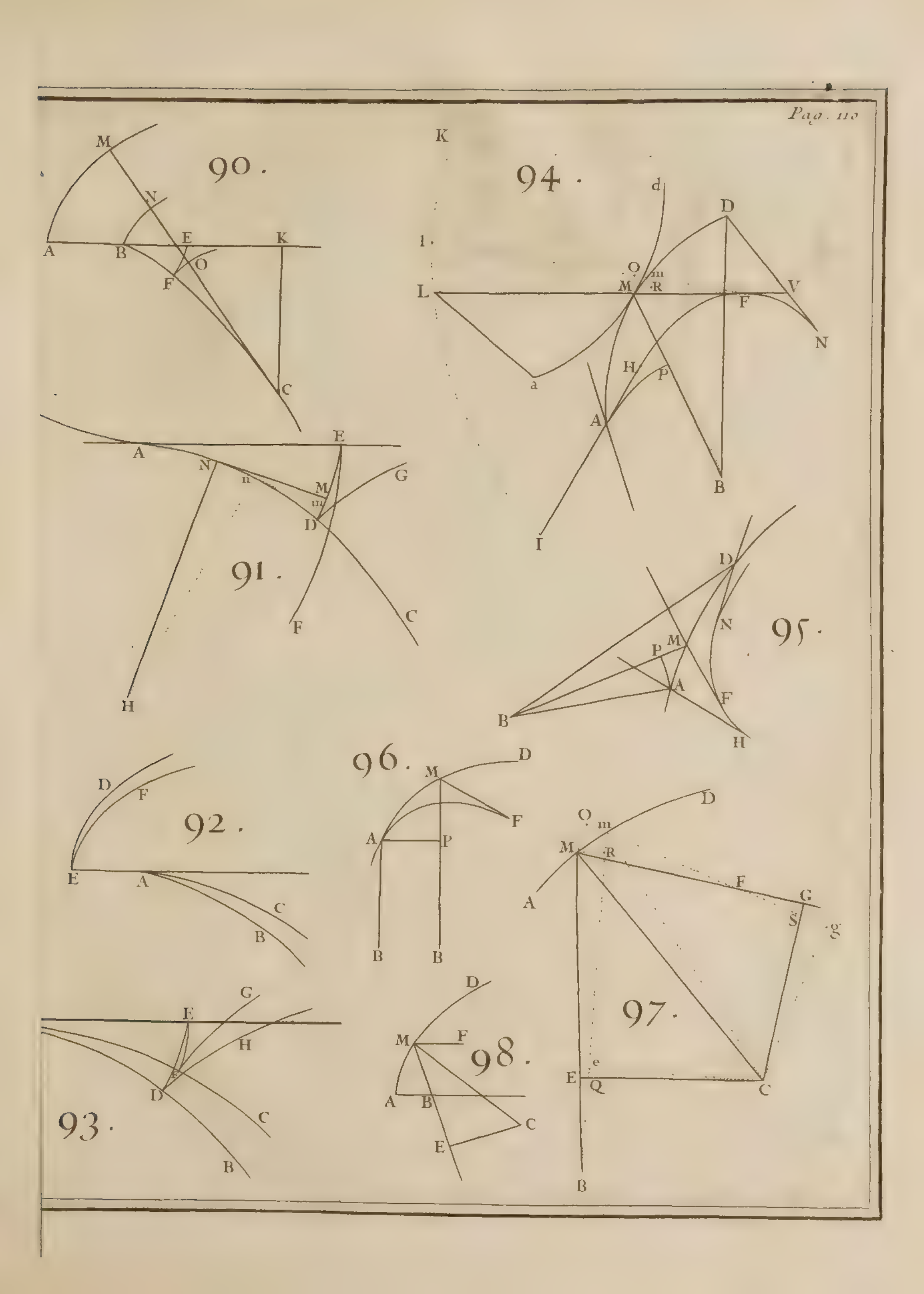
EXEMPLE I.

119. SOIT la courbe *AMD* une parabole, dont les rayons incidens *PM* ſoient perpendiculaires ſur ſon axe *AP*. Il faut trouver ſur les réfléchis *MF* les points *F* où ils touchent la cauſtique *AFK*. FIG. 101.

Il eſt clair que ſi l'on mene le rayon MC de la dévelopée, & qu'on tire la perpendiculaire CG ſur le rayon
* *Art.* 113. réfléchi MF, il faudra * prendre MF égale à la moitié de MG. Mais cette conſtruction ſe peut abréger, en conſidérant que ſi l'on mene MN parallele à l'axe AP, & la droite ML au foyer L ; les angles LMP, FMN ſeront égaux, puiſque par la proprieté de la parabole $LMQ = QMN$, & par la ſuppoſition $PMQ = QMF$. Si donc l'on ajoûte de part & d'autre le même angle PMF, l'angle LMF ſera égal à l'angle PMN, c'eſt à dire droit. Or l'on vient de
* *Art.* 118. *num.* 1. démontrer * que LH perpendiculaire ſur ML rencontre le rayon MC de la dévelopée en ſon milieu H. Si donc l'on mene MF parallele & égale à LH, elle ſera un des rayons réfléchis, & touchera en F la cauſtique AFK. Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on ſuppoſe que le rayon réfléchi MF ſoit parallele à l'axe AP, il eſt évident que le point F de la cauſtique ſera le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe AP, puiſque la tangente en ce point ſera parallele à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les cauſtiques, telles que AFK, formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à conſidérer que MP doit être alors égale à PQ. Ce qui donne $dy = dx$. Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire $AP\ (x) = \frac{1}{4}a$: c'eſt à dire que ſi le point P tombe au foyer L, le rayon réfléchi MF ſera parallele à l'axe. Ce qui eſt d'ailleurs viſible ; puiſque dans ce cas MP ſe confondant avec LM, il faut auſſi que MF ſe confonde avec MN, & LH avec LQ. D'où l'on voit que MF eſt alors égale à ML ; & partant que ſi l'on mene FR perpendiculaire ſur l'axe, on aura AR ou $AL + MF = \frac{3}{4}a$. On voit auſſi que la portion AF de la cauſtique eſt égale en ce cas au parametre, puiſ-
* *Art.* 110. qu'elle eſt toujours * égale à $PM + MF$.

Pour déterminer le point K où la cauſtique AFK rencontre l'axe AP, il faut chercher la valeur de MO, & l'é-


90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.

galer à celle de MF; car il eſt viſible que le point F tombant en K, les lignes MF, MO deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue MO, t; l'angle PMO coupé en deux également par MQ perpendiculaire à la courbe, donnera $MP\ (y) . MO\ (t) :: PQ\ (\frac{ydy}{dx}) . OQ = \frac{tdy}{dx}$. & partant $OP = \frac{tdy + ydy}{dx} = \sqrt{tt - yy}$, à cauſe du triangle réctangle MPO; & diviſant de part & d'autre par $t + y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t - y}{t + y}}$, d'où l'on tire $MO\ (t) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2} = MF\ (\frac{1}{2}a) = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}$, puiſque * $ME\ (a) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$, qui ſervira à trouver le point P tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF, ce dernier touche la cauſtique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP. *Art. 77.

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire $AP\ (x) = \frac{3}{4}$ du parametre.

Pour trouver la nature de la cauſtique AFK à la maniére de *Deſcartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée $AR\ (u)$, à l'appliquée $RF\ (z)$; ce qui ſe fait en cette ſorte. Puiſque $MO\ (t) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}$, l'on aura $PO\ (\frac{tdy + ydy}{dx}) = \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}$; & à cauſe des triangles ſemblables MPO, MSF, on formera ces proportions $MO\ (\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}) . MF\ (\frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy})$ ou $-2yddy . dx^2 - dy^2 :: MP\ (y) . MS\ (y - z) = \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} :: PO\ (\frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}) . SF$ ou $PR\ (u - x) = \frac{dxdy}{-ddy}$. On aura donc ces deux

équations $z = y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$, & $u = x + \frac{dxdy}{-ddy}$, qui serviront avec celle de la courbe donnée à en former une nouvelle où x & y ne se trouveront plus, & qui exprimera par conséquent la relation de *AR* (u) à *FR* (z).

Lorsque la courbe *AMD* est une parabole, comme l'on a supposé dans cet éxemple, on trouvera $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$, & $u = 3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$ qui exprime la nature de la caustique *AFK*. On peut remarquer que *PR* est toujours double de *AP*, puisque *AR* $(u) = 3x$; ce qui fournit encore une nouvelle maniére de déterminer sur le rayon réfléchi *MF* le point cherché *F*.

EXEMPLE II.

Fig. 102. 120. SOIT la courbe *AMD* un demi-cercle qui ait pour diametre la ligne *AD*, & pour centre le point *C*; soient les rayons incidens *PM* perpendiculaires sur *AD*.

Comme la dévelopée du cercle se réunit en un seul point qui en est le centre, il s'ensuit * que si l'on coupe le rayon *CM* en deux également au point *H*, & qu'on mene *HF* perpendiculaire sur le rayon réfléchi *MF*, il coupera ce rayon en un point *F*, où il touche la caustique *AFK*. Il est clair que le rayon réfléchi *MF* est égal à la moitié de l'incident *PM*; d'où il suit, 1°. Que le point *P* tombant en *C*, le point *F* tombe en *K* milieu de *CB*. 2°. Que la portion *AF* est triple de *MF*, & la caustique *AFK* triple de *BK*. On voit aussi que si l'on fait l'angle *ACM* demi-droit, le rayon réfléchi *MF* sera parallele à *AC*; & partant que le point *F* sera plus élevé au dessus du diametre *AD*, que tout autre point de la caustique.

* Art. 113.

Le cercle qui a pour diametre *MH*, passe par le point *F*; puisque l'angle *HFM* est droit. Et si l'on décrit du centre

tre C & du rayon CK ou CH, moitié de CM, le cercle KHG; l'arc HF ſera égal à l'arc HK: car l'angle CMF étant égal à CMP ou HCK, les arcs $\frac{1}{2}HF$, HK qui meſurent ces angles dans les cercles MFH, KHG, ſeront entr'eux comme les rayons $\frac{1}{2}MH$, HC de ces cercles. D'où l'on voit que la cauſtique AFK eſt une roulette formée par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

EXEMPLE III.

121. SOIT la courbe AMD un cercle qui ait pour diamétre la ligne AD, & pour centre le point C; ſoit le point lumineux A, d'où partent tous les rayons incidens AM, l'une des extrémités de ce diamétre. Fig. 103.

Si l'on mene du centre C ſur le rayon incident AM la perpendiculaire CE: il eſt clair par la proprieté du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM; & qu'ainſi $ME\ (a) = \frac{1}{2}y$. On aura donc $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{3}y$: c'eſt à dire qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM. D'où l'on voit que $DK = \frac{1}{3}AD$, $CK = \frac{1}{3}CD$, & que * la cauſtique $AFK = \frac{4}{3}AD$, de même que ſa portion $AF = \frac{4}{3}AM$. Si l'on prend $AM = AC$, le rayon réfléchi MF ſera parallele au diamétre AD; & par conſéquent le point F ſera le plus élevé qu'il ſoit poſſible au deſſus de ce diamétre. * *Art.* 110.

Si l'on prend $CH = \frac{1}{3}CM$, & qu'on tire HF perpendiculaire ſur MF; le point F ſera à la cauſtique: car menant HL perpendiculaire ſur AM, il eſt clair que $ML = \frac{2}{3}ME = \frac{1}{3}AM$, puiſque $MH = \frac{2}{3}CM$. Le cercle qui a pour diamétre MH, paſſera donc par le point F de la cauſtique; & ſi l'on decrit un autre cercle KHG du centre C, & du rayon CK ou CH, il lui ſera égal, & l'arc HK

ſera égal à l'arc HF : car dans le triangle iſoſcele CMA l'angle externe $KCH = 2CMA = AMF$; & partant les arcs HK, HF meſures de ces angles dans des cercles égaux, ſeront auſſi egaux. D'où il ſuit que la cauſtique AFK eſt encore une roulette decrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

On pourroit encore prouver ceci de cette autre maniére. Si l'on decrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui ci, en commençant au point A; l'on a démontré dans le Corollaire
* *Art.* 111. ſecond *qu'elle aura pour dévelopée la cauſtique AFK. Or
* *Art.* 100. * cette developee eſt une roulette de même eſpece, c'eſt à dire que les diamétres des cercles générateurs en ſeront égaux; & on determinera le point K en prenant CK troiſieme proportionnelle à $CD + DA$ & à CD, c'eſt à dire égale à $\frac{1}{3} CD$. Donc, &c.

EXEMPLE IV.

FIG. 104. **122.** SOIT la courbe AMD une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi cercle NGM ſur la droite BD, dont le ſommet eſt en A, & l'origine en D; ſoient les rayons incidens KM paralleles à l'axe AB.

* *Art.* 95. Puiſque *MG eſt égale à la moitié du rayon de la déve-
* *Art.* 113. lopée, il s'enſuit * que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur le rayon réflechi MF, le point F ſera à la cauſtique DFB. D'où l'on voit que MF doit être priſe égale à KM.

Si l'on mene du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G, & au point décrivant M, les rayons HG, HM; il eſt clair que HG ſera perpendiculaire ſur BD, & que l'angle $GMH = MGH = GMK$: d'où l'on voit que le rayon reflechi MF paſſe par le centre H. Or le cercle qui a pour diamétre GH, paſſe auſſi par le point F; puiſque l'angle GFH eſt droit. Donc les arcs GN, $\frac{1}{2}GF$, meſures du même angle GHN, ſeront entr'eux comme les diamétres

MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc $GF = GN = GB$. Il eſt donc évident que la cauſtique DFB eſt une roulette décrite par la révolution entiere du cercle GFH ſur la droite BD.

EXEMPLE V.

123. SOIT encore la courbe AMD une demi roulette ordinaire, dont la baſe BD eſt egale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et ſoient à préſent les rayons incidens PM paralleles à la baſe BD. FIG. 105.

Si l'on mene GQ perpendiculaire ſur PM, les triangles réctangles GQM, BPN ſeront égaux & ſemblables; & partant $MQ = PN$. D'où l'on voit * qu'il faut prendre MF égale à l'appliquée correſpondante PN dans le demi-cercle générateur ANB. *Art. 95. 113.

Afin que le point F ſoit le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe AB, il faut que la tangente MF en ce point ſoit parallele à cet axe. L'angle PMF ſera donc alors droit, ſa moitié PMG ou PNB demi droit; & partant le point P tombera dans le centre du cercle AND.

C'eſt une choſe digne de remarque, que le point P approchant enſuite continuellement de l'extrémité B, le point F approche auſſi de l'axe AB juſqu'à un certain point K, après quoi il s'en éloigne juſqu'en D; de ſorte que la cauſtique $AFKFD$ a un point de rebrouſſement en K.

Pour le déterminer, je remarque * que la portion $AF = PM + MF$, la portion $AFK = HL + LK$, & la portion KF de la partie KFD, eſt $= HL + LK - PM - MF$: d'où l'on voit que $HL + LK$ doit être un *plus grand.* C'eſt pourquoi nommant AH, x; HI, y; l'arc AI, u; l'on aura $HL + LK = u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy = 0$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = 0$, en mettant pour du ſa valeur $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cauſe du cercle; & partant $AH\ (x) = \frac{3}{2}a$. *Art. 110. 111.

COROLLAIRE.

124. L'ESPACE AFM ou $AFKFM$ renfermé par les portions de courbes AF ou $AFKF$, AM, & par le rayon réfléchi MF, eſt égal à la moitié de l'eſpace circulaire APN. Car ſa différence, qui eſt le ſécteur FMO, eſt égale à la moitié du réctangle $PpSN$, difference de l'eſpace APN; puiſque les triangles réctangles MOm, MRm étant égaux & ſemblables, MO ſera égale à MR ou NS ou Pp, & que de plus $MF = PN$.

EXEMPLE VI.

FIG. 106. 125. SOIT la courbe AMD une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de ſon égal AGK, dont l'origine eſt en A, & le ſommet en D; ſoient les rayons incidens AM qui partent tous du point A. La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, paſſe continuellement par le point touchant G, & les arcs GM, GA comme auſſi leurs cordes, ſont toujours égaux; ainſi l'angle $HGM = BGA$, & l'angle $GMA = GAM$. Or l'angle $HGM + BGA = GMA + GAM$; puiſqu'ajoûtant de part & d'autre le même angle AGM, on en forme deux droits. Donc l'angle HGM ſera toujours égal à l'angle GMA; & partant auſſi à l'angle de réfléxion GMF: d'où il ſuit que MF paſſe toujours par le centre H du cercle mobile.

Maintenant ſi l'on mene les perpendiculaires CE, GO ſur le rayon incident AM: il eſt clair que $MO = OA$, & que
* Art. 100. $OE = \frac{1}{3}OM$; puiſque * le point C étant à la dévelopée, $GC = \frac{1}{3}GM$. On aura donc $ME = \frac{2}{3}AM$, c'eſt à dire $a = \frac{2}{3}y$; & par conſéquent $MF\ (\frac{ay}{2y-a}) = \frac{1}{2}y$: d'où l'on voit que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur MF, le point F ſera à la cauſtique AFK.

Le cercle qui a pour diamétre GH, paſſe par le point F; & les arcs GM, $\frac{1}{2}GF$, meſures du même angle GHM, étant

entr'eux comme les diamétres *MN*, *GH* de leurs cercles, l'arc *GF* sera égal à l'arc *GM*, & par conséquent à l'arc *GA*. D'où il est évident que la caustique *AFK* est une roulette décrite par la révolution du cercle mobile *HFG* autour de l'immobile *AGK*.

COROLLAIRE.

126. Si l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point *B*, & pour rayon une droite égale à *BH* ou *AK*; & qu'il y ait une infinité de droites paralleles à *BD* qui tombent sur sa circonférence : il est visible * qu'elles formeront en se réfléchissant la même caustique *AFK*. * *Art.* 120

EXEMPLE VII.

127. Soit la courbe *AMD* une logarithmique spirale, avec les rayons incidens *AM* qui partent tous du centre *A*. Fig. 107.

Si l'on mene par l'extrémité *C* du rayon de la dévelopée la droite *CA* perpendiculaire sur le rayon incident *AM*, elle le rencontrera * dans le centre *A*. C'est pourquoi $AM (y) = a$; & partant $MF \left(\frac{ay}{2y-a}\right) = y$. Le triangle *AMF* sera donc isoscele; & comme les angles d'incidence & de réfléxion *AMT*, *FMS* sont égaux entreux, il s'ensuit que l'angle *AFM* est égal à l'angle *AMT*. D'où il est clair que la caustique *AFK* sera une logarithmique spirale qui ne differera de la proposée *AMD* que par sa position. * *Art.* 91.

PROPOSITION II.

Problême.

128. La *caustique* HF *par réfléxion étant donnée avec le point lumineux* B; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle soit caustique par réfléxion.* Fig. 108.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque *HA* le point *A* pour un des points de la courbe cherchée *AM*;

on décrira du centre B, de l'intervale BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervale quelconque BM, un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM, on développera la caustique HF en commençant au point E; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon
*Art. 110. BM, en un point M qui sera * à la courbe AM. Car par construction $PM + MF = AH + HF$.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ses extrémitez en B & en F, on fera tendre ce fil par le moyen d'un stile placé en M, que l'on fera mouvoir en sorte que l'on envelopera par la partie MF de ce fil la caustique HF; il est clair que ce stile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.

AUTRE SOLUTION.

129. AYANT tiré à discrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera sur elle un point M, tel que $BM + MF = BA + AH + HF$. Ce qui se fera en cette sorte.

Soit prise $FK = BA + AH + HF$, & divisant BK par le milieu en G, soit tirée la perpendiculaire GM: elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car $BM = MK$.

FIG. 109. Si le point B étoit infiniment eloigné de la courbe AM, c'est à dire que les rayons incidens BA, BM fussent paralleles à une ligne droite donnée de position; la premiére construction auroit toujours lieu, en considérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires sur les rayons incidens. Mais cette derniere deviendroit inutile; c'est pourquoi il faudroit lui substituer celle qui suit.

Soit prise $FK = AH + HF$. Ayant trouvé le point M tel que MP parallele à AB perpendiculaire sur AP, soit égale
* Art. 110. à MK: il est clair * que ce point sera à la courbe cherchée AM; puisque $PM + MF = AH + HF$. Or cela se fait ainsi.

Soit menée KG perpendiculaire sur AP; & ayant pris $KO = KG$, soient tirées KP parallele à OG, & PN parallele à GK: je dis que le point M sera celui qu'on cherche.

Car à cause des triangles semblables GKO, PMK, l'on aura $PM = MK$; puisque $GK = KO$.

Si la caustique HF se réunissoit en un point, la courbe AM deviendroit une section conique.

COROLLAIRE I.

130. Il est clair que la courbe qui passe par tous les points K, est formée par le developement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à mesure que le point A change de place sur la tangente AH. Donc puisque les courbes AM naissent toutes de ces courbes par la même construction, qui est géometrique; il s'ensuit* qu'elles sont d'une nature differente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF est géométrique & réctifiable. *Art. 108.

COROLLAIRE II.

131. Une ligne courbe DN étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, en sorte que les rayons reflechis DA, NM se réunissent en un point donné B, après s'être réflechis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM. Fig. 110.

Si l'on imagine que la courbe HF soit la caustique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il est clair que cette ligne HF doit être aussi la caustique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B; de sorte que $FK = BA + AH + HF$, & $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC - CN$, puisque* $HD + DC = HF + FN + NC$. Ce qui donne cette construction. *Art. 110.

Ayant pris à discrétion sur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra sur un autre rayon réfléchi NM tel qu'on voudra, la partie $NK = BA + AD + DC - CN$; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-dessus, art. 129.

SECTION VII.

Usage du Calcul des differences pour trouver les Caustiques par réfraction.

DE'FINITION.

FIG. 111. SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, qui partent d'un même point lumineux B, se rompent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en s'approchant ou s'éloignant de ses perpendiculaires MC, en sorte que les sinus CE des angles d'incidence CME, soient toujours aux sinus CG des angles de réfraction CMG, en même rai-
FIG. 112. son donnée de m à n; la ligne courbe HFN que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réfraction.*

COROLLAIRE.

132. SI l'on envelope la caustique HFN en commençant au point A, l'on décrira la courbe ALK telle que la tangente LF plus la portion FH de la caustique sera continuellement égale à la même droite AH. Et si l'on conçoit une autre tangente Fml infiniment proche de FML, avec un autre rayon d'incidence Bm, & qu'on décrive des centres F, F, les petits arcs MO, MR: on formera deux petits triangles rectangles MRm, MOm qui seront semblables aux deux autres MEC, MGC, chacun à chacun; puisque si l'on ôte des angles droits RME, CMm le même angle EMm, les angles restans RMm, EMC seront égaux; & de même si l'on ôte des angles droits GMO, CMm le même angle GMm, les restans OMm, GMC seront égaux. C'est pourquoi $Rm . Om :: CE . CG :: m . n$. Or puisque Rm est
* Art. 96. la difference de BM, & Om celle de LM; il s'ensuit* que $BM - BA$ somme de toutes les differences Rm dans la portion de courbe AM, est à ML ou $AH - MF - FH$ somme de toutes les différences Om dans la même portion.

tion AM, comme m eſt à n; & partant que la portion

$$FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM.$$

Il peut arriver différens cas, ſelon que le rayon incident BA eſt plus grand ou moindre que BM, & que le rompu AH envelope ou dévelope la portion HF: mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la difference des rayons incidens eſt à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la cauſtique qu'il develope avant que de tomber ſur l'autre) comme m eſt à n. Par éxemple, $BA - BM . AH - MF - FH$ Fig. 112.
$:: m . n$. d'où l'on tire $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$.

Si l'on décrit du centre B l'arc du cercle AP; il eſt clair Fig. 111.
que PM ſera la différence des rayons incidens BM, BA. Et ſi l'on ſuppoſe que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD, les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire ſnr ces rayons.

PROPOSITION I.

Problême général.

133. LA *nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, Fig. 111.
& le rayon incident BM *étant donnés; trouver ſur le rayon rompu* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique par réfraction.*

Ayant trouvé * la longueur MC du rayon de la dévelopée au point donné M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F, les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg ſur les rayons incidens & rompus; & l'on nommera les données BM, y; ME, a; MG, b; & le petit arc MR, dx. Cela poſé, * Sect. 5.

Les triangles rectangles ſemblables MEC & MRm, MGC & MOm, BMR & BQe, donneront $ME (a) . MG (b) :: MR (dx) . MO = \frac{bdx}{a}$. Et $BM (y) . BQ$ ou BE

$(y + a) :: MR\,(dx).\ Qe = \frac{adx + ydx}{y}$. Or par la propriété de la refraction $Ce . Cg :: CE . CG :: m . n$. Et partant $m . n :: Ce - CE$ ou $Qe\,(\frac{adx + ydx}{y}). Cg - CG$ ou $Sg = \frac{andx + nydx}{my}$. Donc à cauſe des triangles réctangles ſemblables FMO & FSg, l'on aura $MO - Sg\,(\frac{bmydx - anydx - aandx}{amy})$. $MO\,(\frac{bdx}{a}) :: MS$ ou $MG\,(b).\ MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette conſtruction.

FIG. 113. Soit fait vers CM l'angle $ECH = GCM$, & ſoit priſe vers B, $MK = \frac{aa}{y}$. Je dis que ſi l'on fait $HK . HE :: MG . MF$. le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car à cauſe des triangles ſemblables CGM, CEH, l'on aura $CG . CE :: n . m :: MG\,(b) . EH = \frac{bm}{n}$ D'où l'on tire $HE - ME$ ou $HM = \frac{bm - an}{n}$, $HM - MK$ ou $HK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; & partant $HK\,(\frac{bmy - any - aan}{ny}) . HE\,(\frac{bm}{n}) :: MG\,(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Il eſt clair que ſi la valeur de HK eſt négative, celle de MF le ſera auſſi : d'où il ſuit que le point M tombe entre les points G, F, lorſque le point H ſe trouve entre les points K, E

FIG. 111. 113. Si le point lumineux B tomboit du côté du point E, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit concave du côté du point lumineux B; y deviendroit négative de poſitive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conſequent $MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. Et la conſtruction demeureroit la même.

Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie : c'eſt à dire que le point lumineux B ſoit infiniment eloigné de la courbe AMD; les rayons incidens ſeront paralleles entr'eux, & l'on aura $MF = \frac{bbm}{bm - an}$, parceque le terme aan ſera nul

par rapport aux deux autres bmy, any; & comme MK $(\frac{aa}{y})$ s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire $HM.HE::MG.MF$.

COROLLAIRE I.

134. On démontrera, de même que dans les caustiques par réfléxion*, qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une seule caustique par réfraction, la raison de m à n étant donnee; laquelle caustique est toujours géométrique & réctifiable, lorsque la courbe proposée AMD est geometrique. *Art. 114. 115.

COROLLAIRE II.

135. Si le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE soit égale à CG; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par réfléxion. En effet on aura MF $(\frac{bbmy}{bmy - any \mp aan}) = \frac{ay}{2y \mp a}$; puisque $m = n$, & que a devient négative de positive qu'elle étoit, & de plus égale à b. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la section précédente.

Si m est infinie par rapport à n; il est clair que le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM: de sorte que la caustique par réfraction deviendra la dévelopée. En effet on aura $MF = b$, qui devient en ce cas MC: c'est-à-dire que le point F tombera sur le point C, qui est à la dévelopée.

COROLLAIRE III.

136. Si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que la valeur de MF $(\frac{bbmy}{bmy - any - aan})$ soit positive; il est clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G, par rapport au point M, comme on l'a supposé en faisant le calcul: & qu'au contraire si elle est negative, il le faudra prendre du côté opposé. Il en est de même lorsque la courbe AMD est concave vers le point B; mais il faut observer qu'on aura pour lors

$MF = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. D'où il suit que les rayons rompus infiniment proches sont convergens lorsque la valeur de MF est positive dans le premier cas, & negative dans le second : & qu'au contraire ils sont divergens lorsqu'elle est négative dans le premier cas, & positive dans le second. Cela posé ; il est évident,

1°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m soit moindre que n ; ou que si elle est concave vers ce point, & que m surpasse n : les rayons rompus infiniment proches seront toujours divergens.

2°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m surpasse n ; ou que si elle est concave vers ce point, & que m soit moindre que n : les rayons rompus infiniment proches seront convergens, lorsque $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ est moindre que $MH\left(\frac{bm}{n} - a \text{ ou } a - \frac{bm}{n}\right)$; divergens, lorsqu'elle est plus grande ; & paralleles, lorsqu'elle est égale. Or comme $MK = o$, lorsque les rayons incidens sont paralleles, il s'ensuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches seront toujours convergens.

COROLLAIRE IV.

137. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura $ME(a) = o$; & partant $MF = b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors sur le point G.

Si le rayon incident BM est perpendiculaire à la courbe AMD, les droites $ME(a)$ & $MG(b)$ deviendront égales chacune au rayon CM de la dévelopee ; puisqu'elles se confondent avec lui. On aura donc $MF = \frac{bmy}{my - ny + bn}$, qui devient $\frac{bm}{m-n}$ lorsque les rayons incidens sont paralleles entr'eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M, l'on aura $MG(b) = o$. D'où l'on voit que la caustique touche alors la courbe donnée au point M.

Si le rayon CM de la dévelopée eſt nul; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ ſeront auſſi egales à zero; & par conſequent les termes aan, $bbmy$ ſont nuls par rapport aux autres bmy, any. D'où il ſuit que $MF = o$; & qu'ainſi la cauſtique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la developée eſt infini; les droites $ME(a)$, $MG(b)$ ſeront auſſi infinies; & par-conſéquent les termes bmy, any ſeront nuls par rapport aux autres aan, $bbmy$: de ſorte qu'on aura $MF = \frac{bbmy}{-aan}$. Or * comme cette quantité eſt négative lorſque l'on ſuppoſe que le point F tombe de l'autre coté du point B par rapport à la ligne AMD, & qu'au contraire elle eſt poſitive lorſqu'on ſuppoſe qu'il tombe du même côté; il s'enſuit * que l'on doit prendre le point F du même côté du point B, c'eſt-à-dire que les rayons rompus infiniment proches ſont divergens. Il eſt evident que le petit arc Mm devient alors une ligne droite, & que la conſtruction précedente n'a plus de lieu. On peut lui ſubſtituer celle ci, qui ſervira à déterminer les points des cauſtiques par réfraction lorſque la ligne AMD eſt droite.

* *Art.* 133.

* *Art.* 136.

Ayant mené BO perpendiculaire ſur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire ſur AD; on tirera OL perpendiculaire ſur le rayon rompu MG; & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera $BM . BH :: ML . MF$. Je dis que le point F ſera à la cauſtique par réfraction. FIG. 114.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO ſeront toujours ſemblables de quelque grandeur que l'on ſuppoſe CM; & partant lorſqu'elle devient infinie, l'on aura encore $ME(a) . MG(b) :: BM(y) . ML = \frac{by}{a}$. Et à cauſe des triangles ſemblables OLM, OBH, l'on aura auſſi $OL . OB(n . m) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) . BH = \frac{bmy}{an}$. D'où lon voit que $BM(y) . BH\left(\frac{bmy}{an}\right) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) . MF\left(\frac{bbmy}{aan}\right)$.

COROLLAIRE V.

138. IL eſt clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troiſiéme.

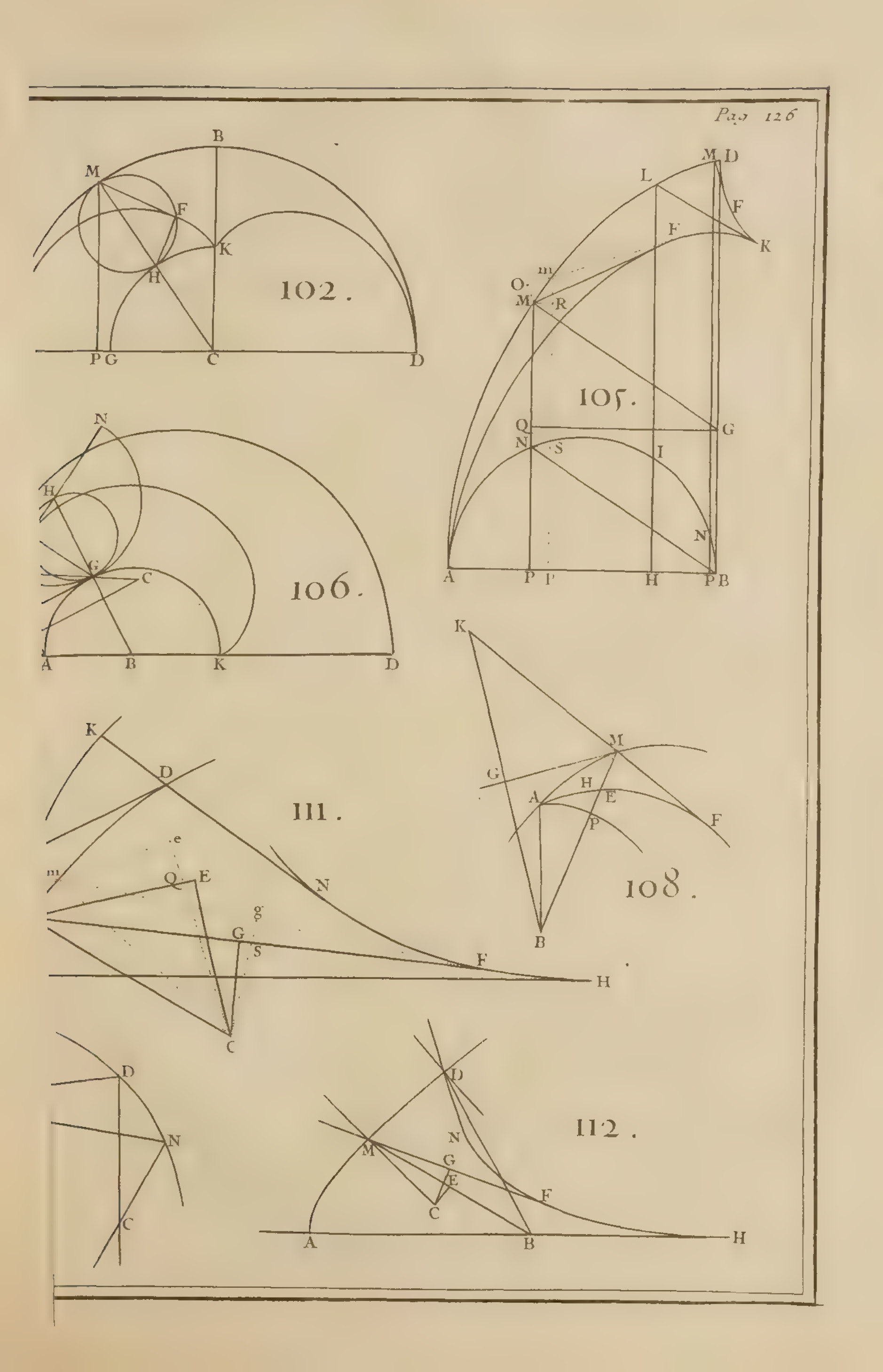
EXEMPLE I.

FIG. 115. 139. SOIT la courbe AMD un quart de cercle qui ait pour centre le point C; ſoient les rayons incidens BA, BM, BD paralleles entr'eux, & perpendiculaires ſur CD; ſoit enfin la raiſon de m à n, comme 3 à 2, qui eſt celle que ſouffrent les rayons de lumiere en paſſant de l'air dans le verre. Puiſque la dévelopee du cercle AMD ſe réünit en un point C qui en eſt le centre, il s'enſuit que ſi l'on décrit une demi-circonference MEC qui ait pour diamétre le rayon CM, & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3} CE$; la ligne MG ſera le rayon rompu, ſur lequel on déterminera le point F, comme l'on a enſeigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire ſur AMD touche la cauſtique par réfra-
*Art. 137. ction, l'on aura * $AH \left(\frac{bm}{m-n}\right) = 3b = 3CA$. Et ſi l'on décrit une demi-circonférence CND qui ait pour diamétre le rayon CD, & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3} CD$; il eſt
*Art. 137. clair * que le point N ſera à la cauſtique par réfraction, puiſque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D.

*Art. 132. Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt viſible * que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3} PM$: de ſorte que la cauſtique entiere $HFN = \frac{7}{3} CA - DN = \frac{7 - \sqrt{5}}{3} CA$.

FIG. 116. Si le quart de cercle AMD eſt concave vers les rayons incidens BM, & que la raiſon de m à n ſoit de 2 à 3; on prendra ſur la demi-circonférence CEM qui a pour diametre le rayon CM, la corde $CG = \frac{3}{2} CE$, & on tirera le rayon rompu MG ſur lequel on déterminera le point F par la conſtruction générale art. 133.



102.
M
B
F
K
H
P G
C
D
105.
M D
L
F
F
K
m
O
M
R
Q
G
N
S
I
N
A
P
P
H
P B
106.
N
H
G
C
A
B
K
D
108.
K
M
G
H
A
E
P
F
B
111.
K
D
e
m
Q
E
N
g
G
S
F
H
C
112.
D
N
M
G
E
C
F
A
B
H
D
N
C

On aura* AH $(\frac{bm}{m-n}) = -2b$, c'eſt à dire que AH ſera *Art. 137.
du côté * de la convexité du quart de cercle AMD, & *Art. 136.
double du rayon AC. Et ſi l'on ſuppoſe que CG ou $\frac{3}{2}$ CE ſoit egale à CM; il eſt manifeſte que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M, puiſqu'alors le point G ſe confondra avec le point M. D'où il ſuit que ſi l'on prend $CE = \frac{2}{3}CD$, le point M tombera au point N où la cauſtique HFN* touche le quart de cercle AMD. Mais lorſ- *Art. 137.
que CE ſurpaſſe $\frac{2}{3}$ CD, les rayons incidens BM ne pourront plus ſe rompre, c'eſt à dire paſſer du verre dans l'air; puiſqu'il eſt impoſſible que CG perpendiculaire ſur le rayon rompu MG, ſoit plus grande que CM: de ſorte que tous les rayons qui tomberont ſur la partie ND ſe réfléchiront.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt clair * que la *Art. 132.
portion $FH = AH - MF + \frac{3}{2}PM$: de ſorte que menant NK parallele à CD, la cauſtique entiere $HFN = 2CA + \frac{3}{2}AK = \frac{7-\sqrt{5}}{2}CA$.

EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe AMD une logarithmique ſpirale Fig. 117.
qui ait pour centre le point A, duquel partent tous les rayons incidens AM.

Il eſt clair * que le point E tombe ſur le point A, c'eſt *Art. 91.
à dire que $a = y$. Si donc l'on met à la place de a ſa valeur y dans $\frac{bbmy}{bmy - amy + aan}$ valeur * de MF lorſque la courbe *Art. 133.
eſt concave du coté du point lumineux; on aura $MF = b$; d'où l'on voit que le point F tombe ſur le point G.

Si l'on mene la droite AG, & la tangente MT; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM, ſera egal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diametre la ligne CM, paſſant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour meſure la moitié du même arc AM. Il eſt donc évident que la cauſtique AGN eſt la même lo-

garithmique spirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en diffère que par sa position.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 118. 141. LA *caustique* HF *par réfraction étant donnée avec son point lumineux* B, *& la raison de* m *à* n; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle soit caustique par réfraction.*

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervale BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervale quelconque BM un autre arc de cercle; & ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en enveloppant la caustique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervale BM, en un point
*Art. 132. M qui sera à la courbe cherchée. Car *$PM . AE$ ou $ML :: m . n$.

AUTRE SOLUTION.

142. ON cherchera sur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$. C'est pourquoi si l'on prend $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$, & qu'on trouve sur FK un point M tel que
*Art. 132. $MK = \frac{n}{m} BM$, il sera * celui qu'on cherche. Or cela se
Fig. 119. peut faire en décrivant une ligne courbe GM telle que menant d'un de ses points quelconque M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles ayent toujours entr'elles un même rapport que m à n. Il n'est donc question que de trouver la nature de ce lieu.

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire sur BK, & nommée la donnée BK, a; & les indéterminees BR, x; RM, y. Les triangles rectangles BRM, KRM donneront $BM = \sqrt{xx + yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$: de

de ſorte que pour remplir la condition du Problême, l'on aura $\sqrt{xx+yy} \cdot \sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m.n.$ D'où l'on tire $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$, qui eſt un lieu au cercle que l'on conſtruira ainſi.

Soit priſe $BG = \frac{am}{m+n}$, & $BQ = \frac{am}{m-n}$, & ſoit décrit du diametre GQ la demi-circonférence GMQ: je dis qu'elle ſera le lieu requis. Car ayant QR ou $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$, & RG ou $BR - BG = x - \frac{am}{m+n}$; la proprieté du cercle, qui donne $QR \times RG = \overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$.

Si les rayons incidens BA, BM ſont paralleles à une droite donnée de poſition, la premiere ſolution aura toujours lieu; mais celle ci deviendra inutile, & on pourra lui ſubſtituer la ſuivante. Fig. 120.

Soit priſe $FL = AH - HF$; & ayant mené LG parallele à AB & perpendiculaire ſur AP, on prendra $LO = \frac{n}{m} LG$, & on tirera LP parallele à GO, & PM parallele à GL. Il eſt clair * que le point M ſera celui qu'on cherche; car puiſque $LO = \frac{n}{m} LG$, $ML = \frac{n}{m} PM$. * Art. 132.

Si la cauſtique FH par réfraction, ſe reünit en un point; les courbes AM deviennent les Ovales de *Deſcartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Geometres.

COROLLAIRE I.

143. ON démontre de même que dans les cauſtiques par reflexion*, que les courbes AM ſont de nature differente entr'elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF par réfraction eſt géometrique & rectifiable. * Art. 130.

COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe AM étant donnée avec le point lumineux B, & la raiſon de m à n; trouver une infi- Fig. 121.

nité de lignes telles que DN, en sorte que les rayons rompus MN se rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour se reunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe HF soit la caustique par refraction de la courbe donnée AM, formée par le point lumineux B; il est clair que cette même ligne HF doit être aussi la caustique par refraction de la courbe cherchée DN, ayant pour point lumineux le point donné C.
*Art. 132. C'est pourquoi * $\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MF+FH$, & $NF+FH-\frac{n}{m}NC=HD-\frac{n}{m}DC$; & partant $\frac{n}{m}BA+AH=\frac{n}{m}BM+MN+HD-\frac{n}{m}DC+\frac{n}{m}NC$; & transposant à l'ordinaire, $\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD=MN+\frac{n}{m}NC$. Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN, on prendra sur un autre rayon rompu quelconque MF la partie $MK=\frac{n}{m}BA-\frac{n}{m}BM+\frac{n}{m}DC+AD$;
*Art. 142. & ayant trouvé, comme ci-dessus *, le point N tel que
*Art. 132. $NK=\frac{n}{m}NC$, il est clair * qu'il sera à la courbe DN.

COROLLAIRE GE'NE'RAL.

Pour les trois Sections précédentes.

*Art. 80. 85. 107. 108. 114. 115. 126. 129. 134. 143.

145. IL est manifeste * qu'une ligne courbe n'a qu'une seule dévelopée, qu'une seule caustique par reflexion, & qu'une seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesquelles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la dévelopée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très differentes entr'elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable.

SECTION VIII.

Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Problême.

146. SOIT *donnée une ligne quelconque* AMB, *qui ait pour axe la droite* AP; *soient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui passent toutes par le point* A, *&* *qui ayent pour axes les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.* FIG. 122.

Il est clair que le point touchant de chaque parabole *AMC* est le point d'intersection *C* où la parabole *AmC*, qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mene *CK* parallele à *MP*, soient nommées les données *AP*, x; *PM*, y; & les inconnues *AK*, u; *KC*, z. On aura par la proprieté de la parabole, $\overline{AP}^2 (xx) . \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) :: MP (y) . MP - CK (y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui est l'équation commune à toutes les paraboles telles que *AMC*. Or je remarque que les inconnues *AK* (u) & *KC* (z) demeurent les mêmes, pendant que les données *AP* (x) & *PM* (y) varient en devenant *Ap* & *pm*; & qu'il n'arrive que *KC* (z) demeure la même, que lorsque le point *C* est celui d'intersection: car il est visible que par tout ailleurs la droite *KC* coupera les deux paraboles *AMC*, *AmC* en deux differens points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de *AK*. C'est pourquoi si l'on traite u & z comme constantes, en prenant la difference de l'equation que l'on vient de trouver, on déterminera le point *C* à être celui d'intersection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue

AK $(u) = \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{2uxy - uuy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée, on trouvera une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans la valeur de AK, cette inconnue sera enfin exprimée en termes entierement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Si au lieu des paraboles AMC, on proposoit d'autres lignes droites ou courbes dont la position fût determinée, on résoudroit toujours le Problême à peu près de la même maniére : & c'est ce que l'on verra dans les Propositions suivantes.

EXEMPLE.

147. QUE l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB : elle sera une demi-ellipse qui aura pour petit axe, la droite $AB = a$ perpendiculaire sur AP, & dont le grand axe sera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant AK $\left(\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}\right) = \frac{ax}{y} = u$. D'où il suit que si l'on prend AK quatriéme proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mene KC perpendiculaire sur AK; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui passe par tous les points C ainsi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la relation de $AK\,(u)$ à $KC\,(z)$ en cette sorte. Mettant à la place de u sa valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{aa}{2a - z}$; & partant x ou $\frac{uy}{a} = \frac{au}{2a - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne se rencontrent plus, & qui exprime la relation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée est une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour sommet le point B, pour foyer le point A, & dont le parametre par consequent est quadruple de AB.

On vient de trouver $y = \frac{az}{2a - z}$, d'où l'on tire KC (z) $= \frac{2ay - aa}{y}$. Or comme cette valeur eſt poſitive lorſque $2y$ ſurpaſſe a, négative lorſqu'il eſt moindre, & nulle lorſqu'il lui eſt egal : il s'enſuit que le point touchant C tombe au deſſus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit ſuppoſe en faiſant le calcul ; au deſſous dans le ſecond, & enfin ſur AP dans le troiſiéme.

Si l'on mene la droite AC qui coupe MP en G ; je dis que $MG = BQ$, & que le point G eſt le foyer de la parabole AMC. Car, 1°. AK $(\frac{ax}{y})$. KC $(\frac{2ay - aa}{y})$ :: AP (x). $PG = 2y - a$. & partant $MG = a - y = BQ$. 2°. Le parametre de la parabole AMC, eſt $= 4a - 4y$ en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$; & partant MG $(a - y)$ eſt la quatriéme partie du parametre : d'où l'on voit que le point G eſt le foyer de la parabole ; & qu'ainſi l'angle BAC doit être diviſé en deux également par la tangente en A.

Il ſuit de ce que le parametre de la parabole AMC eſt quadruple de BQ, que le ſommet M tombant en A, le parametre ſera quadruple de AB, & qu'ainſi la parabole, qui a pour ſommet le point A, eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C.

Comme la parabole BC touche toutes les paraboles telles que AMC ; il eſt clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée AC en des points qui ſeront plus proches du point A que le point C. Or l'on démontre dans la Baliſtique (en ſuppoſant que AK ſoit horizontale) que toutes les paraboles telles que AMC marquent le chemin que décrivent en l'air des Bombes qui ſeroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations poſſibles avec la même force. D'où il ſuit que ſi l'on mene une droite qui diviſe par le milieu l'angle BAC ; elle marquera la poſition que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe ſur le plan AC donné de poſition, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élevation.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 123. 148. Soit *donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; *trouver une autre courbe* BC *telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée* PM, *& la perpendiculaire* PC *à cette courbe, ces deux lignes* PM, PC *soient toujours égales entr'elles.*

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pm; il est clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle est le point d'intersection où le cercle qui en est infiniment proche, le coupe. Cela posé, soit mené CK perpendiculaire sur AP; soient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui est l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence est $2ydy = 2xdx - 2udx$: d'où l'on tire PK ($x - u$) $= \frac{ydy}{dx}$; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM; & ayant pris $PK = PQ$, soit tirée KC parallele à PM: je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon $PC = PM$ au point C, où il touche la courbe cherchée BC. Ce qui est évident; puisque $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre maniére.

Ayant mené PO perpendiculaire sur Cp, les triangles réctangles pOP, PKC seront semblables; & partant Pp $(dx) . Op\ (dy) :: PC\ (y) . PK = \frac{ydy}{dx}$.

Lorsque $PQ = PM$, il est clair que le cercle décrit du rayon PC, touchera KC au point K: de sorte que le point

touchant C se confondra avec le point K, & tombera par consequent sur l'axe.

Mais lorsque PQ surpassera PM, le cercle décrit du rayon PC ne pourra toucher la courbe BC; puisqu'il ne pourra rencontrer la droite KC en aucun point.

EXEMPLE.

149 SOIT la courbe donnée AM, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura PQ ou $PK\ (x - u) = \frac{1}{2}a$; & par conséquent $x = \frac{1}{2}a + u$, & $yy = \frac{1}{4}aa + zz$ à cause du triangle réctangle PKC. Or si l'on met ces valeurs dans $ax = yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + zz$ ou $\frac{1}{4}aa + au = zz$, qui exprime la nature de la courbe BC. D'où il est clair que cette courbe est la même parabole que AM; puisqu'elles ont l'une & l'autre le même parametre a, & que son sommet B est éloigné du sommet A de la distance $BA = \frac{1}{4}a$. FIG. 123.

PROPOSITION III.

Problême.

150. SOIT *donnée une ligne courbe quelconque* AM, *qui ait pour diametre la droite* AP, *& dont les appliquées* PM, pm *soient paralleles à la droite* AQ *donnée de position; & ayant mené* MQ, mq *paralleles à* AP, *soient tirées les droites* PQC, pqC. *On demande la courbe* AC *qui a pour tangentes toutes ces droites : ou, ce qui est la même chose, il s'agit de déterminer sur chaque droite* PQC *le point touchant* C. FIG. 124.

Ayant imaginé une autre tangente pqC infiniment proche de PQC, & mené CK parallele à AQ, on nommera les données & variables AP, x; PM ou AQ, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & les triangles semblables PAQ, PKC donneront $AP\ (x) . AQ\ (y) :: PK\ (x + u) . KC\ (z) = y + \frac{uy}{x}$. qui est l'équation

commune à toutes les droites telles que KC. Sa différence est $dy + \frac{uxdy - uydx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $AK\ (u) = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette construction générale

Soit menée la tangente MT, & soit prise AK troisiéme proportionnelle à AT, AP : je dis que si l'on mene KC parallele à AQ, elle ira couper la droite PQC au point cherché C.

Car $AT\ (\frac{ydx - xdy}{dy}) . AP\ (x) :: AP\ (x) . AK = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$.

EXEMPLE I.

Fig. 124. 151. SOIT la courbe donnée AM, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura $AT = AP$; d'où il suit que $AK\ (u) = x$, c'est à dire que le point K tombe sur le point T. Si l'on veut à present avoir une équation qui exprime la relation de $AK\ (u)$ à $KC\ (z)$; on trouvera $KC\ (z) = 2y$, puisque l'on vient de trouver que PK est double de AP. Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe AC est une parabole qui a pour sommet le point A, & pour parametre une ligne quadruple du parametre de la parabole AM.

EXEMPLE II.

Fig. 125. 152. SOIT la courbe donnée AM, un quart de cercle BMD qui ait pour centre le point A, & pour rayon la ligne AB ou AD, que j'appelle a. Il est clair que PQ est toujours égale au rayon AM ou AB, c'est à dire qu'elle est par tout la même : de sorte que l'on peut concevoir que ses extrémites P, Q glissent le long des côtes BA, AD de l'angle droit BAD. On aura $AK\ (u) = \frac{x^3}{aa}$, puisque $AT = \frac{aa}{x}$; & les paralleles KC, AQ donneront $AP\ (x) . PQ\ (a) :: AK\ (\frac{x^3}{aa}) . QC = \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troisiéme propor-

proportionnelle à PQ & AP. Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci,

$$\begin{array}{llll} u^6 - 3aau^4 & + 3a^4uu & - a^6 & = 0. \\ + 3zz & + 21aazz & + 3a^4zz & \\ & + 3z^4 & - 3aaz^4 & \\ & & + z^6 & \end{array}$$

COROLLAIRE I.

153. SI l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à sa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP; & ayant décrit du centre C le petit arc PO, l'on aura $cp - CP$ ou $Op - Cc = -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de $CP = \frac{aa - xx}{a}$: d'où l'on tire $Cc = Op + \frac{2xdx}{a}$. Or à cause des triangles réctangles semblables QPA, PpO, l'on aura $PQ\,(a).\ AP\,(x) :: Pp\,(dx).\ Op = \frac{xdx}{a}$. & partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il est donc manifeste qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours $DC - Dc\,(\frac{3xdx}{a}).\ CP - cp\,(\frac{2xdx}{a}) :: 3 . 2$. D'où il suit que la somme de toutes les differences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD, c'est à dire * la portion DC de la courbe BCD, est à la somme de toutes les differences $CP - cp$ qui répondent à la même droite PD, c'est à dire * à la tangente $CP :: 3 . 2$. Et de même que la courbe entiére BCD est à sa tangente $BA :: 3 . 2$.

*Art. 96.

*Art. 96.

COROLLAIRE II.

154. SI l'on dévelope la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que CN $CP :: 3 . 2$. puisque CN est toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il suit que les sécteurs semblables CNn, CPO sont entr'eux $:: 9 . 4$. & partant que l'espace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui est tangente en C, & perpendiculaire en

N, eſt à l'eſpace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9. à 4.

COROLLAIRE III.

155. Le centre de peſanteur du ſécteur CNn doit être ſitué ſur l'arc PO; puiſque $CP = \frac{2}{3}CN$. Et comme cet arc eſt infiniment petit, il s'enſuit que ce centre doit être ſur la droite AD; & partant que le centre de peſanteur des eſpaces DCN, BDF, qui ſont composés de tous ces ſécteurs, doit être ſur cette droite AD: de ſorte que ſi l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de peſanteur de la figure entiere ſeroit au point A.

COROLLAIRE IV.

156. A cauſe des triangles réctangles ſemblables PQA, pPO, l'on aura $PQ\,(a).\,AQ$ ou $PM\,(\sqrt{aa-xx}) :: Pp\,(dx)\,.$ $PO = \frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$. Et à cauſe des ſécteurs ſemblables CPO, CNn, l'on aura auſſi $CP.CN$, ou $2.3 :: PO\,(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}).Nn$
*Art. 2. $= \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}$. Or le réctangle $MP \times Pp$, c'eſt à dire * le petit eſpace circulaire $MPpm = dx\sqrt{aa-xx}$. On aura donc $AB \times Nn = \frac{3}{2}MPpm$: d'où il ſuit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, eſt ſeſquialtére du ſegment circulaire DMP, & que la courbe entiére DNF eſt égale aux trois quarts de BMD quatriéme partie de la circonférence du cercle.

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 126. 157. Soit *donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; *& ſoient entendues une infinité de perpendiculaires* MC, mC *à cette courbe. On demande la courbe*

120.

B G L O P M B A E F H

F H

121.

M N K F A D C H

122.

B m Q M C G A P P K

123.

H M m B A K P p O Q C B B

124.

C q Q M m K T A P p

125.

B Q M q m C c o A K P p D T n N F

qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui est la même chose, il faut trouver sur chaque perpendiculaire MC *le point touchant* C.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mC* infiniment proche de *MC*, avec une appliquee *MP*, l'on menera par le point d'interfection *C* les droites *CK* perpendiculaire & *CE* parallele à l'axe : ayant ensuite nomme les données & variables *AP*, x ; *PM*, y ; les inconnues & constantes *AK*, u ; *KC*, z ; l'on aura $PQ = \frac{ydy}{dx}$, *PK* ou *CE* $= u - x$, $ME = y + z$; & les triangles rectangles semblables *MPQ*, *MEC* donneront $MP(y) . PQ(\frac{ydy}{dx}) :: ME(y+z) . EC(u-x) = \frac{ydy + zdy}{dx}$. qui est une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que *MC*, & dont la différence (en supposant dx constante) donne $-dx = \frac{yddy + dy^2 + zddy}{dx}$: d'où l'on tire $ME(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe *AM* étant donnée, l'on aura des valeurs de dy & ddy en dx^2, lesquelles étant substituees dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, donneront pour *ME* une valeur entiérement connue & délivrée des differences. Ce qui étoit proposé.

Il est évident que la courbe qui passe par tous les points *C*, est la dévelopée de la courbe *AM* ; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquieme, il seroit inutile d'en donner ici des éxemples nouveaux.

PROPOSITION V.

Problême.

158. DEUX *lignes quelconques* AM, BN *étant données avec une ligne droite* MN *qui demeure toujours la même ; on suppose que les extrémités* M, N *de cette ligne glissent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe quelle touche toujours dans ce mouvement.* FIG. 127.

Ayant mené les tangentes *MT*, *NT*, & imaginé une au-

tre droite mn infiniment proche de MN, & qui la coupe par conſequent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de determiner les points. Il eſt clair que la droite MN, pour parvenir en mn, a parcouru par ſes extrêmités les petites portions Mm, Nn des lignes AM, BN, leſquelles ſont communes à cauſe de leur infinie petiteſſe, aux tangentes TM, TN: de ſorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la ſituation infiniment proche mn, ait gliſſé le long des droites TM, TN données de poſition.

Cela bien entendu, ſoient menées ſur NT les perpendiculaires MP, CK; ſoient nommées les données & variables TP, x, PM, y; les inconnues & conſtantes TK, u; KC, z; & la donnée MN qui demeure par tout la même, a. Le triangle réctangle MPN donnera $PN = \sqrt{aa - yy}$; & à cauſe des triangles ſemblables NPM, NKC, l'on aura NP $(\sqrt{aa-yy})$. PM (y) :: NK $(u - x - \sqrt{aa-yy})$. KC $(z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa - yy}} - y$. dont la différence donne $aaudy - aaxdy - aaydx + y^3dx = \overline{aady - yydy}\sqrt{aa-yy}$: d'où en faiſant $\sqrt{aa-yy} = m$ pour abréger, l'on tire PK $(u - x) = \frac{m^3dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3 + mmx}{aa}$ en mettant pour ydx ſa valeur xdy, à cauſe des triangles ſemblables mRM, MPT; & partant $MC = \frac{mm + mx}{a}$: ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée TE perpendiculaire ſur MN, & ſoit priſe $MC = NE$: je dis que le point C ſera celui qu'on cherche. Car à cauſe des triangles réctangles ſemblables MNP, TNE, l'on aura MN (a). NP (m) :: NT $(m + x)$. NE ou $MC = \frac{mm + mx}{a}$.

Autre maniére. Ayant mené TE perpendiculaire ſur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE, r; ET, s; MN, a; & l'inconnue CM, t. On aura Sm ou $On = dt$; & les triangles réctangles ſem-

blables *MET* & *mSM*, *NET* & *nON*, *CMS* & *CNO* donneront $ME(r-a) . ET(s) :: mS(dt) . SM = \frac{sdt}{r-a}$. Et $NE(r)$. $ET(s) :: nO(dt) . ON = \frac{sdt}{r}$. Et $MS - NO(\frac{asdt}{rr-ar})$. $MS(\frac{sdt}{r-a}) :: MN(a) . MC(t) = r$. Ce qui donne la même construction que ci-dessus.

Si l'on suppose que les lignes *AM*, *BN* soient des droites qui fassent entr'elles un angle droit; il est visible que la courbe cherchée est la même que celle de l'article 152.

PROPOSITION VI.

Problême.

159. SOIENT *données trois lignes quelconques* L, M, N; *& soient entendues de chacun des points* L, l *de la ligne* L *deux tangentes* LM *&* LN, lm *&* ln, *aux deux courbes* M *&* N, *une à chacune. On demande la quatrième courbe* C, *qui ait pour tangentes toutes les droites* MN, mn *qui joignent les points touchans des courbes* M, N. FIG. 128.

Ayant tiré la tangente *LE*, & mené par un de ses points quelconque *E* les perpendiculaires *EF*, *EG* sur les deux autres tangentes *ML*, *NL*, on concevra que le point *l* soit infiniment près du point *L*; on tirera les petites droites *LH*, *LK* perpendiculaires sur *ml*, *nl*; comme aussi les perpendiculaires *MP*, *mP*, *NQ*, *nQ* sur les tangentes *ML*, *ml*, *NL*, *nl*, lesquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points *P* & *Q*. Tout cela formera les triangles rectangles semblables *EFL* & *LHl*, *EGL* & *LKl*; comme aussi les triangles *LMH* & *MPm*, *LnK* & *NQn* réctangles en *H* & *m*, *K* & *N*, qui seront semblables entr'eux, puisque les angles *LMH*, *MPm* étant joints l'un ou l'autre au même angle *PMm*, font un droit. On prouvera de même, que les angles *LnK*, *NQn* sont égaux entr'eux.

Cela posé, on nommera le petit coté *Mm* du polygone qui compose la courbe *M*, *du*; & les données *EF*, *m*; *EG*, *n*; *MN* ou *mn*, *a*; *ML* ou *ml*, *b*; *NL* ou *nl*, *c*; *MP* ou

mP, f; NQ ou nQ, g (je prens ici les droites MP, NQ pour données, parceque la nature des courbes M, N étant donnée par la supposition, on les pourra toujours trouver *); & l'on aura, 1°, $MP(f) . ML(b) :: Mm(du) . LH = \frac{bdu}{f}$. 2°. $EF(m) . EG(n) :: LH\left(\frac{bdu}{f}\right) . LK = \frac{bndu}{mf}$. 3°. LN ou $Ln(c) . nQ(g) :: LK\left(\frac{bndu}{mf}\right) . nN = \frac{bgndu}{cfm}$. 4°. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml(b) . ln(c) :: mM(du) . MR = \frac{cdu}{b}$. 5°. $MR + Nn\left(\frac{cdu}{b} + \frac{bgndu}{cfm}\right) . MR\left(\frac{cdu}{b}\right) :: MN(a) . MC = \frac{accfm}{ccfm + bbgn}$. Ce qu'il falloit trouver.

*Art. 78.

Si la tangente EL tomboit sur la tangente ML, il est clair que $EF(m)$ deviendroit nulle ou zero; & partant que le point cherché C tomberoit sur le point M. De même si la tangente EL se confondoit avec la tangente LN; alors $EG(n)$ deviendroit nulle, & l'on auroit par consequent $MC = a$: d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit aussi sur le point N. Et enfin si la tangente EL tomboit dans l'angle GLI; en ce cas $EG(n)$ deviendroit négative: ce qui donneroit alors $MC = \frac{accfm}{ccfm - bbgn}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

FIG. 129. 160. SUPPOSONS que les courbes M & N ne fassent qu'un cercle. Il est clair en ce cas que $b = c$, & $f = g$; ce qui donne $MC = \frac{am}{m+n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raison donnée de m à n pour avoir le point cherché C; c'est à dire en sorte que $MC . NC :: m . n$.

EXEMPLE II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N soient une

Séction conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une propriété des Sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent : sçavoir que si l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM & LN, lm & ln à une Séction conique ; toutes les droites MN, mn qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C, par lequel passe le diametre AC, dont les ordonnées sont paralleles à la droite EL. Car il suit de là, que pour avoir le point C, il ne faut que mener un diametre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente EL.

Il est évident que dans le cercle, le diametre doit être perpendiculaire sur la tangente EL ; c'est à dire qu'en menant de son centre A une perpendiculaire AB sur cette tangente, elle coupera la droite MN au point cherché C.

REMARQUE.

162. ON peut par le moyen de ce Problême résoudre celui ci qui dépend de la Méthode des Tangentes. FIG. 128.

Les trois courbes C, M, N, étant données, on fera rouler une ligne droite MN autour de la courbe C, en sorte qu'elle la touche continuellement ; on tirera par les points M, N, où elle coupe les courbes M & N, les tangentes ML, NL qui s'entrecoupent en un point L, lequel décrit dans ce mouvement une quatriéme courbe Ll. Il s'agit de tirer la tangente LE de cette courbe, la position des droites MN, ML, NL étant donnée avec le point touchant C.

Car il est visible que ce Problême n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici MC est donnee : ce qu'on cherche, c'est la raison de EF, EG, qui détermine la position de la tangente EL. C'est pourquoi si l'on nomme la donnée MC, h ; l'on aura $\frac{accfm}{ccfm + bbgn} = h$: d'où l'on tire $m = \frac{bbghn}{accf - ccfh}$; & par conséquent la tangente LE doit être tellement située dans l'angle donné MLG, que si l'on mene d'un de

ſes points quelconque *E* les perpendiculaires *EF*, *EG* ſur les cotés de cet angle, elles ſoient toujours entr'elles en raiſon donnée de $bbgh$ à $accf - ccfh$. Or cela ſe fait en menant *MD* parallele à *NL*, & égale à $\frac{b^3gh}{accf - ccfh}$.

FIG. 129. * Art. 161. Il eſt évident * que ſi les deux courbes *M* & *N* ne font qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente *LE* parallele aux ordonnées du diametre qui paſſe par le point *C*.



SECTION

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précedentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x , PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque* x = a, *c'est à dire lorsque le point* P *tombe sur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. FIG. 130.

Soient entendues deux lignes courbes *ANB*, *COB*, qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui soient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction generale qui convient à toutes les *PM*: de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point *B*; puisque par la supposition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorsque le point *P* tombe en *B*. Cela posé, si l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB*, *COB* aux points *f*, *g*; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne differe pas de *BD*. *Art. 2.
Il n'est donc question que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il est visible que la coupée *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN*, *PO* deviennent nulles, & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il suit que ces appliquées, elles mêmes *bf*, *bg*. sont la difference des appliquees en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB*. *COB*; & partant que si l'on prend la difference du numérateur, & qu'on la divise par la difference du denominateur, apres

avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numerateur & le denominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{aax}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est à dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet éxemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

LEMME.

FIG. 131. 166. SOIT *une ligne courbe quelconque* BCG, *avec une ligne droite* AE *qui la touche au point* B, *& sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes* A, E. *Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, en sorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les point fixes* A, E *décriront dans ce mouvement deux courbes* AMD, ENH. *Si l'on mene à présent* DL *parallele à* AB, *& qui fasse par conséquent avec* DK *(sur laquelle je suppose la droite* AE *lorsqu'elle*

touche la courbe BCG *en* G) *l'angle* KDL *égal à l'angle* AOD *fait par les tangentes en* B, G ; *& que l'on décrive comme on voudra, du centre* D *l'arc* KFL :

Je dis que DK . KFL :: AE . AMD ± ENH. *sçavoir + lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivans, & — lorsqu'il les laisse toujours du même côté.*

Car supposant que la droite *AE* en roulant autour de la courbe *BCG* soit parvenue dans les positions *MCN*, *mCn* infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons *DF*, *Df* paralleles à *CM*, *Cm* : il est clair que les sécteurs *DFf*, *CMm*, *CNn* seront semblables ; & qu'ainsi *DF*. *Ff* :: *CM* . *Mm* :: *CN*. *Nn* :: *CM* ± *CN* ou *AE* . *Mm* ± *Nn*. Or comme cela arrivera toujours en quelqu'endroit que se trouve le point touchant *C*, il s'ensuit que le rayon *DK* est à l'arc *KFL* somme de tous les petits arcs *Ff* :: *AE* . *AMD* ± *ENH* somme de tous les petits arcs *Mm* ± *Nn*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. IL est visible que les courbes *AMD*, *ENH* sont formées par le dévelopement de la même courbe *BCG* ; & qu'ainsi la droite *AE* est toujours perpendiculaire sur ces deux courbes dans toutes les positions où elle se rencontre : de sorte que leur distance est par tout la même ; ce qui est la proprieté des lignes paralleles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe *AMD* étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe *ENH* sans avoir besoin de sa dévelopée *BCG*, en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite *AE*.

COROLLAIRE II.

168. SI la courbe *BCG* a ses deux moitiés *BC*, *CG* entiérement semblables & égales, & que l'on prenne les droites *BA*, *GH* égales entr'elles ; il est clair que les courbes *AMD*, *ENH* seront semblables & egales, en sorte

qu'elles ne différeront que par leur position. D'où il suit que la courbe *AMD* sera à l'arc de cercle *KFL* :: $\frac{1}{2}$ *AE*. *DK*. c'est à dire en raison donnée.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 132. 169. Soient *deux courbes quelconques* AEV, BCG, *avec une troisiéme* AMD *telle qu'ayant décrit par le dévelopement de la courbe* BCG *une portion de courbe* EM, *la relation des portions de courbes* AE, EM, *& des rayons de la dévelopée* EC, MG *soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné* M *sur la courbe* AMD *la tangente* MT.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em* infiniment proche de *EM*, & les rayons de la dévelopée *CeF*, *GmR*; Soit, 1°. *CH* perpendiculaire sur *CE*, & qui rencontre en *H* la tangente *EH* de la courbe *AEV*. 2°. *ML* parallele à *CE*, & qui rencontre en *L* l'arc *GL* décrit du centre *M* & du rayon *MG*. 3°. *GT* perpendiculaire sur *MG*, & qui rencontre en *T* la tangente cherchée *MT*.

On nommera ensuite les données *AE*, x; *EM*, y; *CE*, u; *GM*, z; *CH*, s; *EH*, t; l'arc *GL*, r: d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles réctangles semblables *eFE*, *ECH* donneront $CE\,(u).\,CH\,(s) :: Fe\,(dz).\,FE = \frac{sdz}{u}$. Et $CE\,(u).\,EH\,(t) :: Fe\,(dz).\,Ee\,(dx) = \frac{tdz}{u}$.

* Art. 166. Or par le Lemme* $RF - me = \frac{rdz}{z}$; & partant $RM\,(\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles réctangles semblables *mRM*, *MGT*, l'on aura $mR\,(dz).\,RM\,(\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy) :: MG\,(z).\,GT = r + \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$. Mais si l'on met dans la différence de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{tdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz, laquelle étant

ſubſtituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la ſoutangente cherchée *GT* une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit propoſé.

Si l'on ſuppoſe que la courbe *BCG* ſe réuniſſe en un point *O*; il eſt viſible que la portion de courbe *ME* (y) ſe change en un arc de cercle égal à l'arc *GL* (r), & que les rayons *CE* (u), *GM* (z) de la dévelopée deviennent égaux entr'eux: de ſorte que *GT*, qui devient en ce cas *OT*, ſe trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$. FIG. 133.

EXEMPLE.

170. SOIT $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront $dy = \frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend * $- xdz$ au lieu de $+ xdz$; parceque x & y croiſſant, z diminue) $= \frac{tdz - xdz}{a}$, en mettant pour dx ſa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant *OT* ($y + s + \frac{zdy}{dz}$) $= y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$ ſa valeur y. FIG. 133. * Art. 8.

REMARQUE.

171. SI le point *O* tombe ſur l'axe *AB*, & que la courbe *AEV* ſoit un demi-cercle; la courbe *AMD* ſera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle *BSN* autour d'un arc egal *BGN* d'un cercle décrit du centre *O*, & dont le point générateur *A* tombera dehors, dedans, ou ſur la circonférence du demi-cercle mobile *BSN*, ſelon que la donnée a ſera plus grande, moindre, ou égale à *OV*. Pour le prouver, & déterminer en même temps le point *B*. FIG. 134.

Je ſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſçavoir que la courbe *AMD* eſt une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle *BSN*, qui a pour centre le point *K* centre du demi-cercle *AEV*, autour de l'arc *BGN* décrit du centre *O*; & concevant que ce demi-cercle *BSN* s'arrête dans la ſituation *BGN* telle que le point décrivant *A*

tombe ſur le point *M*, je mene par les centres des cercles générateurs la droite *OK* qui paſſe par conſequent par le point touchant *G*; & tirant *KSE*, j'obſerve que les triangles *OKE*, *OKM* ſont egaux & ſemblables, puiſque leurs trois côtés ſont egaux chacun à chacun. D'où il ſuit 1°. Que les angles extrêmes *MOK*, *EOK* ſont égaux; & qu'ainſi les angles *MOE*, *GOB* le ſont auſſi : ce qui donne $GB . ME :: OB . OE$. 2°. Que les angles *MKO*, *EKO* ſont encore égaux; & qu'ainſi les arcs *GN*, *BS*, qui les meſurent, le ſont auſſi : la même choſe ſe doit dire de leurs complémens *GB*, *SN*, à deux droits; puiſqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc *GB* du cercle mobile eſt égal à l'arc *GB* de l'immobile. J'aurai donc $SN . ME :: OB . OE$. Cela poſé,

Je nomme les données *OV*, b; *KV* ou *KA*, c; & l'inconnue *KB*, u. J'ai $OB = b + c - u$; & les ſecteurs ſemblables *KEA*, *KSN* me donnent $KE\ (c) . KS\ (u) :: AE\ (x) . SN = \frac{ux}{c}$. Et partant $OB\ (b + c - u) . OE\ (z) :: SN\ (\frac{ux}{c}) . EM\ (y) = \frac{uxz}{bc + cc - cu} = \frac{xz}{a}$. D'où je tire $KB\ (u) = \frac{bc + cc}{a + c}$. Il eſt donc évident que ſi l'on prend $KB = \frac{bc + cc}{a + c}$, & qu'on décrive des centres *K* & *O* le demi-cercle *BSN* & l'arc *BGN*; la courbe *AMD* ſera une demi-roulette décrite par la révolution du demi-cercle *BSN* autour de l'arc *BGN*, & dont le point décrivant *A* tombe dehors, dedans, ou ſur la circonference de ce cercle, ſelon que *KV* (c) eſt plus grand, moindre, ou egal à $KB\ (\frac{bc + cc}{a + c})$, c'eſt à dire ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à *OV* (b).

COROLLAIRE I.

172. Il eſt clair que $EM\ (y) . AE\ (x) :: KB \times OE\ (uz) . OB \times KV\ (bc + cc - uc)$. Or ſi l'on ſuppoſe que *OB* devienne infinie; la droite *OE* le ſera auſſi, & deviendra parallele à *OB*, puiſqu'elle ne la rencontrera jamais; les

arcs concentriques *BGN*, *EM* deviendront des droites paralleles entr'elles, & perpendiculaires ſur *OB*, *OE*: & alors la droite *EM* ſera à l'arc *AE* :: *KB*. *KV*. parceque les droites infinies *OE*, *OB* ne differant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardees comme égales.

COROLLAIRE II.

173. DE ce que les angles *MKO*, *EKO* ſont égaux, il ſuit que les triangles *MKG*, *EKB* ſeront égaux & ſemblables; & qu'ainſi les droites *MG*, *EB* ſont égales entr'elles. D'où l'on voit * que pour mener d'un point donné *M* ſur la roulette, la perpendiculaire *MG*, il n'y a qu'à décrire du centre *O* l'arc *ME*, & du centre *M* de l'intervalle *EB* un arc de cercle qui coupera la baſe *BGN* en un point *G*, par où & par le point donné *M* l'on tirera la perpendiculaire requiſe. * *Art.* 43.

COROLLAIRE III.

174. UN point *G* étant donné ſur la circonférence du demi-cercle mobile *BGN*; ſi l'on veut trouver le point *M* de la roulette ſur lequel tombe le point décrivant *A* lorſque le point donné *G* touche la baſe, il ne faut que prendre l'arc *SN* égal à l'arc *BG*, & ayant tiré le rayon *KS* qui rencontre en *E* la circonférence *AEV*, décrire du centre *O* l'arc *EM*. Car il eſt évident que cet arc coupera la roulette au point cherché *M*.

PROPOSITION III.

Problême.

175. SOIT *une demi-roulette* AMD *décrite par la révolution du demi-cercle* BGN *autour d'un arc égal* BGN *d'un autre cercle, en ſorte que les parties révolues* BG, BG *ſoient toujours égales entr'elles; ſoit le point décrivant* M *pris ſur le diamétre* BN *dehors, dedans, ou ſur la circonférence mobile* BGN. *On demande le point* M *de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à ſon axe* OA. FIG. 135. 136.

Suppoſant que le point *M* ſoit celui qu'on cherche, il

*Art. 47. eſt clair * que la tangente en *M* doit être parallele à l'axe *OA*, & qu'ainſi la perpendiculaire *MG* à la roulette, doit être auſſi perpendiculaire ſur l'axe qu'elle rencontre au point *P*. Cela poſé, ſi l'on mene *OK* par les centres des cercles generateurs, elle paſſera par le point touchant *G*; & ſi l'on tire *KL* perpendiculaire ſur *MG*, on formera les angles égaux *GKL*, *GOB*: & partant l'arc *IG* qui eſt le double de la meſure de l'angle *GKL*, ſera à l'arc *GB* meſure de l'angle *GOB*, comme le diametre *BN* eſt au rayon *OB*. D'où il ſuit que pour déterminer ſur le demi-cercle *BGN* le point *G*, où il touche l'arc qui lui ſert de baſe lorſque le point décrivant *M* tombe ſur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle *BGN* en un point *G*, en ſorte qu'ayant tiré par le point donné *M* la corde *IG*, l'arc *IG* ſoit à l'arc *BG* en raiſon donnée de *BN* à *OB*. La queſtion ſe réduit donc à un Problême de la géométrie commune qui ſe peut toujours réſoudre géométriquement lorſque la raiſon donnée eſt de nombre à nombre; mais avec le ſecours des lignes dont l'équation eſt plus ou moins elevée, ſelon que la raiſon eſt plus ou moins compoſée.

Si l'on ſuppoſe que le rayon *OB* devienne infini, comme il arrive lorſque la baſe *BGN* devient une ligne droite; il s'enſuit que l'arc *IG* ſera infiniment petit par rapport à l'arc *GB*. D'où l'on voit que la ſécante *MIG* devient alors la tangente *MT*, lorſque le point decrivant *M* tombe au dehors du cercle mobile; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur lorſqu'il tombe au dedans

Lorſque le point *M* tombe ſur la circonférence en *N*, il ne faut que diviſer la demi circonference *BGN* en raiſon donnee de *BN* à *OB* au point *G*. Car le point *G* ainſi trouvé, ſera celui où le cercle mobile *BGN* touche la baſe, lorſque le point decrivant tombe ſur le point cherché.

LEMME

LEMME II.

176. *En tout triangle* BAC, *dont les angles* ABC, ACB, *&* CAD *complément à deux droits de l'angle obtus* BAC, *sont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport entr'eux que les côtés* AC, AB, BC, *ausquels ils sont opposez.* Fig. 137.

Car si l'on circonscrit un cercle au tour du triangle *BAC*, les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui mesurent les doubles de ces angles, seront infiniment petits, & ne différeront* point par conséquent de leurs cordes ou soutendantes. *Art. 3.

Si les côtés *AC*, *AB*, *BC* du triangle *BAC*, ne sont pas infiniment petits, mais qu'ils ayent une grandeur finie : il s'ensuit que le cercle circonscrit doit être infiniment grand ; puisque les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les mesures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

Problême.

177. *Les mêmes choses étant posées ; il faut déterminer sur chaque perpendiculaire* MG, *le point* C *où elle touche la dévelopée de la roulette.* Fig. 135. 136.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mg* infiniment proche de *MG*, & qui la coupe par conséquent au point cherché *C*, on tirera la droite *Gm* ; & ayant pris sur la circonférence du cercle mobile le petit arc *Gg* égal à l'arc *Gg* de l'immobile, on menera les droites *Mg*, *Ig*, *Kg*, *Og*. Cela posé, si l'on regarde les petits arcs *Gg*, *Gg* comme de petites droites perpendiculaires sur les rayons *Kg*, *Og*, il est clair que le petit arc *Gg* du cercle mobile tombant sur l'arc *Gg* de l'immobile, le point décrivant *M* tombera sur *m*, en sorte que le triangle *GMg* se confondra avec le triangle *Gmg*. D'où l'on voit que l'angle *MGm* est égal à l'angle $gGg = GKg + GOg$; puisqu'ajoûtant de part & d'autre les mêmes angles *KGg*, *OGg*, l'on en compose deux droits.

Or nommant les données *OG*, *b* ; *KG*, *a* ; *GM* ou *Gm*, *m* ;

* *Art.* 176. GI ou Ig, n; l'on trouve, 1°, * $OG . KG :: GKg . GOg$. Et $OG (b) . OG + GK$ ou $OK (b+a) :: GKg . GKg + GOg$
* *Ibid.* ou $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$. 2°. * $Ig . MI :: GMg . MgI$. Et $Ig \pm MI$ ou $MG (m) . Ig (n) :: GMg \pm MgI$ ou GIg ou $\frac{1}{2} GKg . GMg$
* *Ibid.* ou $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$. 3°. * L'angle MCm ou $MGm - Gmg$ $(\overline{\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg}) . Gmg (\frac{n}{2m} GKg) :: Gm (m) . GC$ $= \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conséquent le rayon cherché MC de la dévelopée sera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Si l'on suppose que le rayon $OG (b)$ du cercle immobile devienne infini, sa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parcequ'ils sont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. De ce que l'angle $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$, & de ce que les arcs de différens cercles sont entr'eux en raison composée des rayons & des angles qu'ils mésurent; il suit que $Gg . Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conséquent aussi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qui est la même chose) que $KG \times Mm . MG \times Gg :: OK (a+b) . OG (b)$. qui est une raison constante. D'où l'on voit que la dimension de la portion AM de la demi roulette AMD, dépend de la somme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB; & c'est ce que M. *Pascal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour bases des lignes droites.

M. *Varignon* est tombé dans cette même propriété par une voye très différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

Fig. 135. 179. Lorsque le point décrivant M tombe hors de

la circonférence du cercle mobile, il arrive neceſſairement l'un des trois cas ſuivans. Car menant la tangente *MT*, le point touchant *G* tombera 1°. Sur l'arc *TB*, comme l'on a ſuppoſé dans la figure en faiſant le calcul ; & alors *MC* $\left(\frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}\right)$ ſurpaſſera toujours *MG* (m). 2°. Sur le point touchant *T* ; & l'on aura pour lors *MC* $\left(\frac{2am + 2bmm}{2amm + 2bm - bn}\right)$ $= m$, puiſque *IG* (n) s'évanouit. 3°. Sur l'arc *TN* ; & alors la valeur de *GI* (n) devenant négative de poſitive qu'elle étoit, l'on aura $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm + bn}$: de ſorte que *MC* ſera moindre que *MG* (m), & toujours poſitif. D'où il eſt évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon *MC* de la dévelopée eſt toujours poſitive.

COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant *M* tombe au dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$; & il peut arriver que bn ſurpaſſe $2am + 2bm$, & qu'ainſi la valeur du rayon *MC* de la dévelopée ſoit négative : d'où l'on voit que lorſqu'elle ceſſe d'être poſitive pour devenir négative, comme il arrive *lorſque le point *M* devient un point d'infléxion, il faut néceſſairement alors que $bn = 2am + 2bm$; & partant que $MI \times MG$ ($mn - mm$) $= \frac{2amm + bmm}{b}$. Or ſi l'on nomme la donnée *KM*, c ; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG \left(\frac{2amm + bmm}{b}\right) = BM \times MN$ ($aa - cc$) ce qui donne l'inconnue *MG* (m) $= \sqrt{\frac{aab + bcc}{2a + b}}$. Donc ſi l'on décrit du point donné *M* comme centre, & de l'intervalle *MG* $= \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ un cercle ; il coupera le cercle mobile en un point *G*, où il touchera le cercle immobile qui lui ſert de baſe, lorſque le point décrivant *M* tombera ſur le point d'infléxion *F*.

FIG. 136.

* *Art.* 81.

Si l'on mene *MR* perpendiculaire sur *BN*; il est clair que cette *MG* ($\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$) sera moindre que *MR* ($\sqrt{aa - cc}$), & qu'elle lui doit être égale lorsque *b* devient infinie, c'est à dire lorsque la base de la roulette devient une ligne droite.

Il est à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon *MG* coupe le cercle mobile, il faut que *MG* surpasse *MN*, c'est à dire que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ surpasse $a - c$; & qu'ainsi *KM* (c) surpasse $\frac{aa}{a + b}$. D'où il est manifeste qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette *AMD*, il faut que *KM* soit moindre que *KN*, & plus grande que $\frac{aa}{a + b}$.

LEMME III.

FIG. 138. 181. SOIENT *deux triangles* ABb, CDd *qui ayent chacun un de leurs côtés* Bb, Dd *infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle* ABb *est au triangle* CDd *en raison composée de l'angle* BAb *à l'angle* DCd, *& du quarré du côté* AB *ou* Ab *au quarré du côté* CD *ou* Cd.

Car si l'on décrit des centres *A*, *C*, & des intervalles
*Art. 2. *AB*, *CD*, les arcs de cercles *BE*, *DF*; il est clair * que les triangles *ABb*, *CDd* ne différeront point des secteurs de cercles *ABE*, *CDF*. Donc, &c.

Si les côtés *AB*, *CD* sont égaux, les triangles *ABb*, *CDd* seront entr'eux comme leurs angles *BAb*, *DCd*.

PROPOSITION V.

Problême.

FIG. 135. 182. LES *mêmes choses étant toujours posées; on demande la quadrature de l'espace* MGBA, *renfermé par les perpendiculaires* MG, BA *à la roulette, par l'arc* GB, *& par la portion* AM *de la demi-roulette* AMD, *en supposant la quadrature du cercle.*

L'angle *GMg* ($\frac{n}{2m} GKg$) est à l'angle *MGm* ($\frac{a + b}{b} GKg$),

comme * le petit triangle MGg qui a pour base l'arc Gg du cercle mobile, au petit triangle ou secteur GMm; & partant le secteur $GMm = \frac{2m}{n} MGg \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b} MGg$ $+ \frac{2ap+2bp}{bn} MGg$ en nommant MI, p, & mettant pour m sa valeur $p+n$. Or * le petit triangle ou secteur KGg est au petit triangle MGg en raison composée du quarré de KG au quarré de MG, & de l'angle GKg à l'angle GMg; c'est à dire :: $aa \times GKg \,.\, mm \times \frac{n}{2m} GKg$. & partant le petit triangle $MGg = \frac{mn}{2aa} KGg$. Mettant donc cette valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg$, l'on aura le secteur $GMm = \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times pm}{aab} KGg$. Mais à cause du cercle, $GM \times MI$ (pn) $= BM \times MN$ ($cc - aa$), qui est une quantité constante, & qui demeure toujours la même en quelqu'endroit que se trouve le point décrivant M; & par conséquent $GMm + MGg$ ou mGg, c'est à dire le petit espace de la roulette $GMmg$ $= \frac{2a+3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$. Donc puisque $GMmg$ est la différence de l'espace de la roulette $MGBA$, & MGg celle de l'espace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit secteur KGg est la différence du secteur KGB; il s'ensuit * que l'espace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGB$. Ce qu'il falloit trouver.

*Art. 181.

*Art. 181.

*Art. 96.

Lorsque le point décrivant M tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe sur l'arc NT; il est visible * que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors $m = p - n$. D'où il suit que le petit secteur GMm $= - \frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{2ab+2bp}{bn} MGg = - \frac{2a-2b}{b} MGg$ $+ \frac{amp+bmp}{aab} KGg$, en mettant comme auparavant pour le

FIG. 139.

*Art. 180.

petit triangle MGg sa valeur $\frac{mn}{2aa}KGg$; & partant que $GMm - MGg$ ou mGg, c'est à dire $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b}MGg + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGg$, en mettant pour pm sa valeur $cc - aa$. Or supposant que TH soit la position de la tangente TM du cercle mobile, lorsque son point T touche la base au point T; il est clair que $MCm - GCg = MGTH - mgTH$, c'est à dire la différence de l'espace $MGTH$, & que MGg est

Art. 96. celle de MGT, de même que KGg celle de KGT. Donc l'espace $MGTH = -\frac{2a-3b}{b}MGT + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGT$. Mais, comme l'on vient de prouver, l'espace $HTBA = \frac{2a+3b}{b}MTB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KTB$. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'espace $MGBA$ ($MGTH + HTBA$) $= \frac{2a+3b}{b}\overline{MTB - MGT}$ ou $MGB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}\overline{KGT + KTB}$ ou KGB.

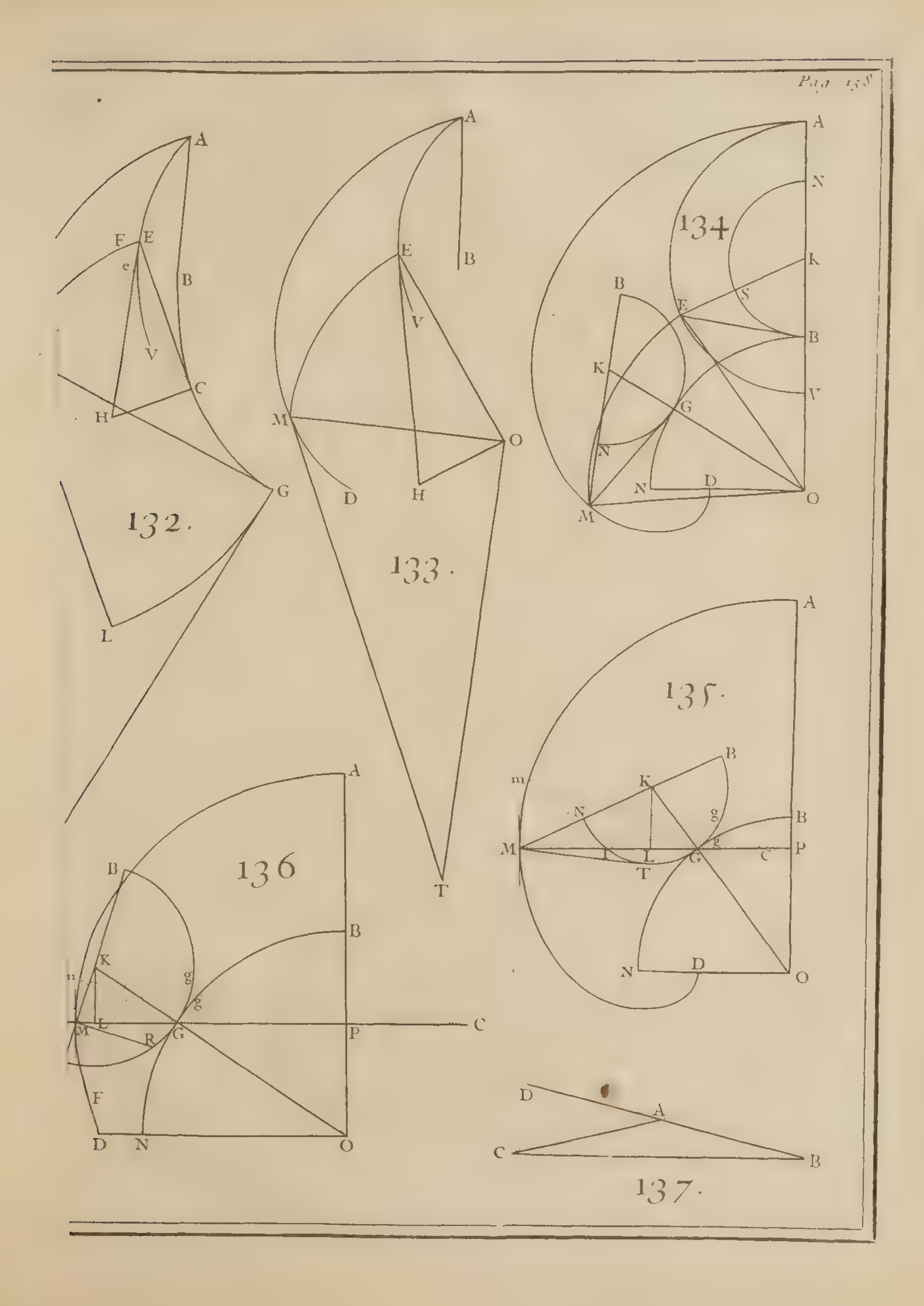
Fig. 135. Donc l'espace entier $DNBA$ renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN, BA, par l'arc de cercle BGN, & par la demi roulette AMD, est $= \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}} \times KNGB$; puisque le secteur KGB & l'espace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle $KNGB$, lorsque le point touchant G tombe au point N.

Fig. 136. Lorsque le point décrivant M tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes; parcequ'alors $BM \times MN = aa - cc$.

Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant sur la circonférence du cercle mobile; & si l'on suppose b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour bases des lignes droites.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 140. 183. On décrit du rayon OD l'arc DV, & des diamétres AV, BN les demi-cercles AEV, BSN; & ayant décrit


132.
133.
134
135.
136
137.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
O
P
R
S
T
V

à discrétion du centre O l'arc EM renfermé entre le demi-cercle AEV & la demi-roulette AMD, l'on mene l'appliquée EP. Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace AEM compris entre les arcs AE, EM, & la portion AM de la demi-roulette AMD.

Pour cela, soit un autre arc em concentrique & infiniment proche de EM, une autre appliquée ep, une autre Oe qui rencontre l'arc ME prolongé (s'il est nécessaire) au point F. Soient nommées les variables Oe, z; VP, u; l'arc AE, x; & comme auparavant les constantes OB, b; KB ou KN, a; KV ou KA, c: l'on aura $Fe = dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE}^2 = 2cu - uu$, l'arc EM * $= \frac{axz}{bc}$; & par- * *Art.* 172.
tant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite Fe, c'est à dire * le petit espace $EMme = \frac{axzdz}{bc}$. Or à cause * *Art.* 2.
du triangle rectangle OPE; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit espace $EMme = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}$.

Maintenant si l'on décrit la demi-roulette AHT par la révolution du demi-cercle AEV sur la droite VT perpendiculaire à VA, & qu'on prolonge les appliquées PE, pe jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H, h: il est clair * que $EH \times Pp$, c'est à dire le petit espace $EHhe$ * *Art.* 172.
$= xdu$; & qu'ainsi $EMme \left(\frac{aaxdu + abxdu}{bc}\right) . EHhe\, (xdu) :: aa + ab . bc$. qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quelqu'endroit que se trouve l'arc EM, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces $EMme$, c'est à dire l'espace AEM, est à la somme de tous les petits espaces $EHhe$, c'est à dire à l'espace $AEH :: aa + ab . bc$. Mais l'on a * la quadrature de l'espace AEH dépen- * *Art.* 99.
damment de celle du cercle; & partant aussi celle de l'espace cherché AEM.

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Aoust de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'eſpace AEH ſans avoir recours à l'art. 99. Car ſi l'on acheve les réctangles PQ, pq, l'on aura Qq ou $HR . Pp$ ou $Rh :: EP . PA$ ou HQ, puiſque * la tangente en H eſt parallele à la corde AE; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'eſt à dire que les petits eſpaces $HQqh$, $EPpe$ ſont toujours egaux entr'eux. D'où il ſuit que l'eſpace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, eſt égal à l'eſpace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'eſpace AEH ſera donc égal au réctangle PQ moins le double de l'eſpace circulaire APE; c'eſt à dire au réctangle fait de PE par KA plus ou moins le réctangle fait de KP par l'arc AE, ſelon que le point P tombe au deſſous ou au deſſus du centre. Et par conſéquent l'eſpace cherché AEM $= \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA \pm KP \times AE}$.

* Art. 18.

COROLLAIRE I.

184. LORSQUE le point P tombe en K, le réctangle $KP \times AE$ s'évanouit, & le réctangle $PE \times KA$ devient égal au quarré de KA: d'où l'on voit que l'eſpace AEM eſt alors $= \frac{aac + abc}{b}$; & par conſéquent il eſt quarrable abſolument & indépendamm ent de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE II.

185. SI l'on ajoûte à l'eſpace AEM le ſécteur AKE, l'eſpace $AKEM$ renfermé par les rayons AK, KE, par l'arc EM, & par la portion AM de la demi-roulette AMD, ſe trouve (lorſque le point P tombe au deſſus du centre K) $= \frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE + \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA$; & partant ſi l'on prend $VP (u) \frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$ (ce qui rend nulle la valeur de $\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE$), l'on aura

l'eſpace

l'eſpace $AKEM = \frac{aa+ab}{bc} PE \times KA$. D'où l'on voit que ſa quadrature eſt encore indépendante de celle du cercle.

Il eſt viſible qu'entre tous les eſpaces *AEM* & *AKEM*, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature ſoit abſolue.

AVERTISSEMENT.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures ſe doit auſſi entendre des intérieures, c'eſt à dire de celles dont le cercle mobile roule au dedans de l'immobile; en obſervant que les rayons KB (a), KV (c) *deviennent négatifs de poſitifs qu'ils étoient. C'eſt pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les ſignes des termes où* a *&* c *ſe rencontrent avec une dimenſion impaire.*

REMARQUE.

186. IL y a certaines courbes qui paroiſſent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point; ce que je crois à propos d'expliquer par un éxemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique *NDN*, dont la nature eſt exprimée par l'équation $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ ($AP = x$, $PN = z$), dans laquelle il eſt clair 1°. Que x étant égale à a; PN (z) s'évanouit. 2°. Que x ſurpaſſant a, la valeur de z eſt poſitive; & qu'au contraire lorſqu'il eſt moindre, elle eſt négative. 3°. Que lorſque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN eſt infinie. D'où l'on voit que la courbe *NDN* paſſe de part & d'autre de ſon axe en le coupant en un point D tel que $AD = a$; & qu'elle a pour aſymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$. FIG. 141.

Si l'on décrit à preſent une autre courbe *EDF*, en ſorte qu'ayant mené à diſcrétion la perpendiculaire *MPN*, le réctangle fait de l'appliquée *PM* par la conſtante *AD*,

soit toujours égal à l'espace correspondant DPN; il est visible qu'en nommant PM, y; & prenant les différences, l'on aura $AD \times Rm (ady) = NPpn$ ou $NP \times Pp$ $\left(\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{2xx - aa}}\right)$; & partant $Rm\ (dy). Pp$ ou $RM\ (dx)$ :: $PN . AD$. D'où il suit que la courbe EDF touche l'asymptote LG prolongée de l'autre coté de B en un point E, & l'axe AP au point D; & qu'ainsi elle doit avoir un point
*Art. 78. d'infléxion en D. Cependant on trouve * $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de sa dévelopée, laquelle est toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorsque le point M
*Art. 81. tombe en D: d'où l'on doit conclure * que la courbe qui passe par tous les points M est toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a pas de point d'infléxion en D. Comment donc accorder tout cela? En voici le dénouëment.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui sera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie; puisque sa génération est la même. Cela étant ainsi, l'on doit penser que les parties qui composent la courbe entiére ne sont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui se touchent au point D; car tout s'accorde parfaitement dans cette derniere supposition. Ceci se confirme encore par cet éxemple.

Fig. 142. Soit la courbe DMG, qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Il suit de cette équation que la courbe entiére a deux parties EDH, GDF opposées l'une à lautre comme l'hyperbole ordinaire, en sorte que leur distance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Fig. 143. Si l'on suppose que b s'évanouisse, la distance DD s'évanouira aussi; & partant les deux parties EDH, GDF se toucheront au point D: de sorte qu'on pourroit penser à présent que cette courbe a un point d'infléxion ou de rebroussement en D, selon qu'on imagineroit que ses par-

ties seroient *EDF*, *GDH* ou *EDG*, *HDF*. Mais l'on se détromperoit aisément, en cherchant le rayon de la dévelopée; car l'on trouveroit qu'il seroit toujours positif, & qu'il deviendroit égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point *D*.

On peut remarquer en passant, que la quadrature de l'espace *DPN* dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce qui revient au même) de la réctification de la parabole; & que la portion de courbe *DMF* satisfait au Problême proposé par M. *Bernoulli* dans le Tome second des Supplémens des Actes de Leypsic, page 291. FIG. 141.



SECTION X.

Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de Mrs Descartes *&* Hudde.

DÉFINITION I.

FIG. 144. 145. 146. SOIT une ligne courbe *ADB* telle que les paralleles *KMN* à son diamétre *AB* la rencontrent en deux points *M*, *N*; & soit entendue la partie interceptée *MN* ou *PQ* devenir infiniment petite. Elle sera nommée alors la *Différence* de la coupée *AP*, ou *KM*.

COROLLAIRE I.

187. LORSQUE la partie *MN* ou *PQ* devient infiniment petite; il est clair que les coupées *AP*, *AQ* deviennent egales chacune à *AE*, & que les points *M*, *N* se réunissent en un point *D*: en sorte que l'appliquée *ED* est la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables *PM*, *NQ*.

COROLLAIRE II.

188. IL est clair qu'entre toutes les coupées *AP*, il n'y a que *AE* qui ait une différence; parcequ'il n'y a qu'en ce cas où *PQ* devienne infiniment petite.

COROLLAIRE III.

189. SI l'on nomme les indéterminées *AP* ou *KM*, x; *PM* ou *AK*, y; il est évident que *AK* (y) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de x, sçavoir *KM*, *KN* ou *AP*, *AQ*. C'est pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe *ADB* soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines (car on regarde y comme connue) puisse avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut observer dans la suite.

PROPOSITION I.

Problême.

190. **L**A *nature de la courbe géométrique* ADB *étant donnée ; déterminer la plus grande ou la moindre de ses appliquées* ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme constante, & x comme variable ; il est clair * qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ses racines x, une valeur AE, telle que l'appliquée ED sera la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables. * *Art.* 188.

Soit, par éxemple, $x^3 + y^3 = axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme constante, donne $3xxdx = aydx$; & partant $y = \frac{3xx}{a}$. Si l'on substitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3 + y^3 = axy$; l'on aura pour x une valeur $AE = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, telle que l'appliquée ED sera la plus grande de toutes ses semblables, de même qu'on l'a déja trouvé art. 48.

Il est évident que l'on détermine de même non seulement les points D, lorsque les appliquées ED sont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais aussi lorsqu'elles sont obliques sur la courbe, c'est à dire lorsque les points D sont des points de rebroussement de la premiere ou seconde sorte. D'où l'on voit que cette nouvelle maniére de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple & moins embarrassante en quelques rencontres, que la * premiere. * *Sect.* 3.

REMARQUE.

191. **O**N peut remarquer dans les courbes rebroussantes, que les PM paralleles à AK ; les rencontrent en deux points M, O, de même que les KM paralleles à AP, font en M, N: de sorte que $AP(x)$ demeurant la même, y a deux Fig. 146.

différentes valeurs PM, PO. C'eſt pourquoi l'on peut traiter x comme conſtante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que ſi l'on traite x & y comme variables, en prenant cette différence, il faudra que tous les termes qui multiplient dx d'une part, & tous ceux qui multiplient dy d'une autre part, ſoient égaux à zero. Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

COROLLAIRE.

192. Si après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence; il eſt clair 1°. Qu'on ne fait autre choſe que de multiplier chaque terme par l'expoſant de la puiſſance de x, & par la différence dx, & le diviſer enſuite par x. 2°. Que cette diviſion par x, auſſi-bien que la multiplication par dx, peut être négligée, parcequ'elle eſt la même dans tous les termes. 3°. Que les expoſans des puiſſances de x font une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'expoſant de ſa plus grande puiſſance, & le dernier eſt zero; car on ſuppoſe qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit par éxemple $x^3 \star - ayx + y^3 = 0$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & \star & -ayx & +y^3 & = 0. \\ 3, & 2, & 1, & 0. & \\ \hline 3x^3 & \star & -ayx & \star & = 0. \end{array}$$

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la maniére accoûtumée.

Cela ſuppoſé, je dis qu'au lieu de la progreſſion arith-

métique $3, 2, 1, 0$, l'on peut ſe ſervir de telle autre progreſſion arithmétique qu'on voudra : $m+3$, $m+2$, $m+1$, $m+0$, ou m (l'on deſigne par m un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif, ou négatif). Car multipliant $x^3 * - ayx + y^3 = 0$ par x^m, l'on aura $x^{m+3} *$, &c. $= 0$, dont les termes doivent être multipliés par ceux de la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m. chacun par ſon correſpondant pour en avoir la difference.

$$\begin{array}{cccccc} x^{m+3} & * & -ayx^{m+1} & +y^3x^m & = 0. \\ m+3, & m+2 & m+1, & m. & \\ \hline \overline{m+3}x^{m+3} & * & -\overline{m+1}ayx^{m+1} & +my^3x^m & = 0. \end{array}$$

Ce qui donnera $\overline{m+3}x^{m+3} - \overline{m+1}ayx^{m+1} + my^3x^m = 0$; & en diviſant par x^m, il viendra $\overline{m+3}x^3 - \overline{m+1}ayx + my^3 = 0$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant ſimplement l'egalité propoſée par la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

Si $m = -3$, la progreſſion ſera $0, -1, -2, -3$; & l'équation ſera $2ayx - 3y^3 = 0$. Si $m = -1$, la progreſſion ſera $2, 1, 0, -1$; & l'équation $2x^3 - y^3 = 0$.

On peut changer de ſignes tous les termes de la progreſſion, c'eſt à dire qu'au lieu de $0, -1, -2, -3$, & $2, 1, 0, -1$, l'on peut prendre $0, 1, 2, 3$, & $-2, -1, 0, 1$; parcequ'on ne fait par là que changer de ſignes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être egalée à zero. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = 0$, $2x^3 - y^3 = 0$, l'on auroit $-2ayx + 3y^3 = 0$, $-2x^3 + y^3 = 0$; ce qui eſt la même choſe.

Or il eſt viſible que ce que l'on vient de demontrer à l'égard de cet éxemple, s'appliquera de même maniére à tous les autres. D'où il ſuit que ſi après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines égales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progreſſion arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ſes racines une des deux égales de la première. Par la même raiſon, ſi cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progreſſion arith-

métique, l'on en formera une troisiéme qui aura entre ses racines une des deux égales de la seconde; & ainsi de suite. De sorte que si l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progressions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ses racines une des trois égales de la premiére; & de même si l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progressions arithmétiques; si cinq, par le produit de quatre, &c.

C'est là précisément en quoi consiste la Méthode de M. *Hudde*.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 147. 193. D'UN *point donné* T *sur le diamètre* AB, *ou du point donné* H *sur* AH *parallele aux appliquées; mener la tangente* THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT, s; AH, t; dont l'une ou l'autre est donnée; & les inconnues AP, x; PM, y: les triangles semblables TAH, TPM donneront $y = \frac{st + tx}{s}$, $x = \frac{sy - st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de y ou de x dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on mene à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G, & la courbe AMD en deux points N, D, desquels l'on abbaisse les appliquées NQ, DB; il est évident que t exprimant AG dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, lesquelles deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque t exprime AH, c'est à dire lorsque la sécante TDN devient la tangente TM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par une progression arithmétique arbitraire;

bitraire; ce que l'on reïtérera, s'il est nécessaire, en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y, avec la donnée s ou t. L'éxemple qui suit éclaircira suffisamment cette Méthode.

EXEMPLE.

194. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, l'on aura tyy, &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$\begin{array}{llll} tyy & - asy & + ast & = o. \\ 1, & o, & - 1. & \\ \hline tyy & * & - ast & = o. \end{array}$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique $1, o, -1$, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant AP (x) $= s$. D'où l'on voit qu'en prenant $AP = AT$; & menant l'appliquée PM, la ligne TM sera tangente en M. Mais si au lieu de AT (s), c'est AH (t) qui est donnée, l'on multipliera la même équation tyy, &c. par cette autre progression $o, 1, 2$, & l'on aura la cherchée PM (y) $= 2t$.

On auroit trouvé la même construction en mettant pour y sa valeur $\frac{st + tx}{s}$ dans $ax = yy$. Car il vient $ttxx$, &c. dont les termes multipliés par $1, o, -1$, donnent $xx = ss$; & par conséquent AP (x) $= s$.

COROLLAIRE.

195. SI l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel la tangente MT rencontre le diametre AB ou la parallele AH aux appliquées; il n'y a qu'à regarder dans la derniére équation qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t, cette derniére comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

Probléme.

Fig. 148. 196. *La nature de la courbe géométrique* AFD *étant donnée; déterminer son point d'infléxion* F.

Ayant mené le point cherché F l'appliquée FE avec la tangente FL, par le point A (origine des x) la parallele AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA, s; AK, t; AE, x; EF, y: les triangles semblables LAK, LEF donneront encore $y = \frac{st + tx}{s}$, & $x = \frac{sy - st}{t}$; de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus, de même que dans la proposition précédente.

Si l'on mene à present une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H, qui touche la courbe AFD en M, & la coupe en D, d'où l'on abaisse les appliquees MP, DB: il est évident 1°. Que s exprimant AT; & t, AH; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, sçavoir* chacune à AP ou à PM selon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB, ou BD. 2°. Que s exprimant AL; & t, AK; le point touchant M se réunit avec le point d'intersection D dans le point cherché F: puisque* la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'infléxion F; & qu'ainsi les valeurs AP, AB de x ou PM, BD de y deviennent égales entr'elles, sçavoir l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF. D'où il suit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par le produit de deux progressions arithmétiques arbitaires; ce que l'on réïtérera, s'il est nécessaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progressions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaison des équations qui en resultent, l'on puisse faire évanouir les inconnues s & t.

* Art. 193.
* Art. 67.

EXEMPLE.

197. SOIT $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$\begin{array}{lllll} sy^3 & - styy & + aasy & - aast & = o. \\ & - at & & & \\ 1, & o, & - 1, & - 2. & \\ 3, & 2, & 1, & o. & \\ \hline 3sy^3 & * & - aasy & * & = o. \end{array}$$

qui étant multipliée par $3, o, - 1, o$, produit des deux progreſſions arithmétiques $1, o, - 1, - 2$, & $3, 2, 1, o$, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue AE $(x) = \frac{1}{4}a$. Ce qui revient à l'art. 68.

AUTRE SOLUTION.

198. ON peut encore réſoudre ce Problême en remarquant que du même point L ou K on ne peut mener qu'une ſeule tangente LF ou KF; parcequ'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans le convexe FD; au lieu que de tout autre point T ou H, pris ſur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave, & l'autre de la convexe : de ſorte qu'on peut conſidérer le point d'infléxion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on ſuppoſe que AT (s) ou AH (t) ſoit donnée, & qu'on cherche * la valeur de x ou y par rapport à s ou t; l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF, lorſque s exprime AL & t, AK. C'eſt pourquoi l'on multipliera cette équation par une progreſſion arithmétique arbitraire, &c.

FIG. 149. 150.

* Art. 194.

EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-dessus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = o$, qui étant multipliée par la progression arithmétique $1, 0, -1, -2$, donne $y^3 * - aay - 2aat = o$, dans laquelle s ne se rencontre plus, & qui a deux racines inegales, sçavoir PM, BD, lorsque t exprime AH, & deux egales chacune à la cherchée EF lorsque t exprime AK. C'est pourquoi multipliant de nouveau cette derniére équation par la progression arithmétique $3, 2, 1, 0$, l'on aura $3yy - aa = o$; & partant EF (ici) $= \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 151. 200. MENER *d'un point donné* C *hors une ligne courbe* AMD *une perpendiculaire* CM *à cette courbe.*

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diamétre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant ensuite les inconnues AP, x; PM, y; CM, r; & les connues AK, s; KC, t: l'on aura PK ou $CE = s - x$, $ME = y + t$; & à cause du triangle rectangle MEC, $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$, $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D, d'où l'on abaisse les perpendiculaires NQ, DB; il est évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent egales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque r exprime le rayon CM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la [illegible] de la courbe AMD, dans laquelle mettant [illegible] $s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$, l'on aura $as - yy = a\sqrt{[illegible]}$ [illegible] de sorte qu'en quarrant chaque membre [illegible] ensuite l'equation, l'on trouvera y^4, &c. [illegible] avoir deux racines egales lorsque y exprime la cherchée PM.

$$
\begin{array}{llllll}
y^4 & * - 2asyy & + 2aaty & + aass & = 0. \\
 & + aa & & - aarr & \\
 & & & + aatt & \\
4, \; 3, & 2, & 1, & 0. & \\
\hline
4y^4 & * - 4asyy & + 2aaty & * & = 0. \\
 & + 2aa & & & \\
\end{array}
$$

C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique $4, 3, 2, 1, 0$, ce qui donnera $4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = 0$, dont la résolution fournira pour y la valeur cherchée MP.

Si le point donné C tomboit sur le diamétre AB; l'on auroit alors $t = 0$, & il faudroit effacer par conséquent tous les termes où t se rencontre; ce qui donneroit $4as - 2aa = 4yy = 4ax$, en mettant pour yy sa valeur ax. D'où l'on tireroit $x = s - \frac{1}{2}a$; c'est à dire que si l'on prend CP égale à la moitié du paramétre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire sur AB, l'on mene la droite CM, elle sera perpendiculaire sur la courbe AMD. FIG. 152.

COROLLAIRE.

202. SI l'on veut à présent que le point M soit donné, & que le point C soit celui qu'on cherche; il faudra dans la derniere équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y), regarder ces derniéres comme connues, & l'autre comme l'inconnue. FIG. 152.

DÉFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la dévelopée l'on décrit un cercle, il sera nommé *cercle baisant.*

Le point où ce cercle touche ou baise la courbe, est appelle *point baisant.*

PROPOSITION V.

Problême.

FIG. 153. 203. LA *nature de la courbe* AMD *étant donnée avec un de ses points quelconque* M; *trouver le centre* C *du cercle qui la baise en ce point* M.

Ayant mené les perpendiculaires *MP*, *CK* sur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problême précédent; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut observer que la lettre *x* ou *y*, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée; & qu'au contraire *s*, *t*, que l'on y regarde comme connues, sont en effet ici les inconnues aussi bien que *r*.

Cela posé, il est clair 1°. Que le point cherché *C* sera situé sur la perpendiculaire *MG* à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en *M*, & la coupera au moins en deux points (dont je suppose que le plus proche est *D*, d'où l'on abaissera la perpendiculaire *DB*); puisque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant *M* n'equivaut qu'à deux intersections. 3°. Que plus son centre *G* approche du point cherché *C*, plus aussi le point d'intersection *D* approche du point touchant *M*: de sorte que le point *G* tombant sur le point
*Art. 76. *C*, le point *D* se reunit avec le point *M*; puisque * le cercle décrit du rayon *CM*, doit toucher & couper la courbe au même point *M*. D'où l'on voit que *s* exprimant *AF*, & *t*, *FG*, l'équation doit avoir deux racines
*Art. 200. égales, sçavoir * chacune à *AP* ou *PM* selon qu'on a fait

évanouir y ou x, & une autre AB ou BD qui devient aussi égale a AP ou PM lorsque s & t expriment les cherchées AK, KC; & qu'ainsi cette équation doit avoir trois racines égales.

EXEMPLE.

204. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera * y^4, &c. qui étant multipliée par $8, 3, 0, -1, 0$, produit des deux progressions arithmetiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $2, 1, 0, -1, -2$ donne $8y^4 = 2aaty$. * Art. 201.

$$\begin{array}{llllll}
y^4 & * - 2asyy & + 2aaty & + aass & = 0. \\
 & + aa & & - aarr & \\
 & & & + aatt & \\
4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\
2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\
\hline
8y^4 & * & * - 2aaty & * & = 0.
\end{array}$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou $PE\ (t) = \frac{4y^3}{aa}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points C, l'on multipliera encore y^4, &c. par $0, 3, 4, 3, 0$, produit des deux progressions $4, 3, 2, 1, 0$, & $0, 1, 2, 3, 4$; & l'on trouvera $8asy - 4aay = 6aat$: d'où, en supposant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3at}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant $16u^3 = 27att$. D'où il suit que la courbe qui passe par tous les points C, est une seconde parabole cubique, dont le paramétre $= \frac{27a}{16}$, & dont le sommet est éloigné de celui de la parabole proposée de $\frac{1}{2}a$; parceque $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorsque la position des parties de la courbe, voisines du point donné M, est entiérement semblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorsque la courbure y est la plus grande ou la moindre; il s'ensuit que l'une des intersections du cercle touchant ne peut se réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réunisse en

même temps : de ſorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. En effet ſi l'on multiplie y^4, &c. par $24, 6, 0, 0, 0$, produit des trois progreſſions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $3, 2, 1, 0, -1$, & $2, 1, 0, -1, -2$; l'on aura $24y^4 = 0$: ce qui fait voir que le point M doit tomber ſur le ſommet A de la parabole, afin que la poſition des parties voiſines de la courbe ſoit ſemblable de part & d'autre.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 154. 205. On peut encore réſoudre ce Problême en ſe ſouvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une ſeule perpendiculaire CM à la courbe AMD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G ſur cette perpendiculaire MC, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on ſuppoſe que le point G ſoit donné, & que l'on cherche * la valeur de x ou y par rapport aux données s & t; il eſt viſible que cette équation doit avoir deux racines inégales, ſçavoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entr'elles lorſque le point G tombe ſur le point cherché C. C'eſt pourquoi l'on multipliera cette équation par une progreſſion arithmétique quelconque, &c.

*Art. 200.

EXEMPLE.

Art. 101. 206. Soit comme ci-deſſus $ax = yy$; & l'on aura $4y^3$, &c.

$$\begin{array}{llll} 4y^3 & * & -4asy & +2aat = 0. \\ & & +2aa & \\ 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 8y^3 & * & * & -2aat = 0. \end{array}$$

qui étant multipliée par la progreſſion arithmétique $2, 1, 0, -1$, donne comme * auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$.

*Art. 204.

COROL-

COROLLAIRE.

207. Il est évident qu'on peut considérer le point baisant comme * la réunion d'un point touchant avec un point d'interſection du même cercle ; ou bien comme * la réunion de deux points touchans de deux cercles differens & concentriques : de même que le point d'inflexion peut être regardé * comme la réunion d'un point touchant avec un point d'interſéction de la même droite, ou * comme la réunion de deux points touchans de deux différentes droites qui partent d'un même point. Fig. 153. 154. * Art. 203. * Art. 205. * Art. 196. * Art. 198.

PROPOSITION VI.

Problême.

208. TROUVER *une équation qui exprime la nature de la cauſtique* AFGK, *formée dans le quart de cercle* CAMNB, *par les rayons réfléchis* MH, NL, *&c. dont les incidens* PM, QN, *&c. ſont paralleles à* CB. Fig. 155.

Je remarque, 1°. Que ſi l'on prolonge les rayons réfléchis *MF*, *NG*, qui touchent la cauſtique en *F*, *G*, juſqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon *CB* aux points *H*, *L* ; l'on aura *MH* égale à *CH*, & *NL* égale à *CL*. Car l'angle $CMH = CMP = MCH$; & de même l'angle $CNL = CNQ = NCL$.

2°. Que d'un point donné *F* ſur la cauſtique *AFK*, l'on ne peut mener qu'une ſeule droite *MH* qui ſoit égale à *CH* ; au lieu que d'un point donné *D* entre le quart de cercle *AMB* & la cauſtique *AFK*, l'on peut mener deux lignes *MH*, *NL* telles que $MH = CH$ & $NL = CL$. Car on ne peut mener du point *F* qu'une ſeule tangente *MH* ; au lieu que du point *D*, on en peut mener deux *MH*, *NL*. Ceci bien entendu,

Soit propoſé de mener d'un point donné *D* la droite *MH*, en ſorte qu'elle ſoit égale à la partie *CH*, qu'elle détermine ſur le rayon *CB*.

Ayant mené *MP*, *DO* paralleles à *CB*, & *MS* parallele à *CA*, ſoient nommées les données *CO* ou *RS*, *u* ; *OD*, *z* ; *AC*

ou CB, a; & les inconnues CP ou MS, x; PM ou CS, [illegible] ou MH, r. Le triangle réctangle MSH [illegible] $+ yy - xx$: d'où l'on tire $CH(r) =$ [illegible]. [illegible] triangles semblables MRD, MSH donn[illegible]. $MS(x) :: RD(z-y) . SH =$ [illegible] & [illegible] ou $CH = \frac{zx - uy}{x - u} = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$ en mettant [illegible] $x + yy$ sa valeur aa. D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation $aax - aau = 2zxy -$ [illegible]; & [illegible] pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient [illegible] $- uxx$: quarrant ensuite chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant encore pour yy sa valeur $aa - xx$, l'on aura enfin

$$\begin{array}{llll} 4uux^4 - 4aaux^3 & -4aauuxx & + 2a^4ux & + a^4uu = 0. \\ 4zz & -4aazz & & \\ & +a^4 & & \end{array}$$

Or il est clair que u exprimant CO; & z, OD; cette égalité doit avoir deux racines inégales, sçavoir CP, CQ: & qu'au contraire u exprimant CE; & z, EF; CQ devient égale à CP, de sorte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi si l'on multiplie les termes par ceux des deux progressions arithmétiques $4, 3, 2, 1, 0$, & $0, 1, 2, 3, 4$, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen desquelles on trouvera, après avoir fait évanouir l'inconnue x, cette équation.

$$\begin{array}{llll} 64z^6 - 48aaz^4 & + 12a^4zz & - a^6 & = 0, \\ + 192uu & - 96aauu & - 15a^4uu & \\ & + 192u^4 & - 48aau^4 & \\ & & + 64u^6 & \end{array}$$

qui exprime la relation de la coupée $CE(u)$ à l'appliquée $EF(z)$. Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en se servant de la Méthode expliquée dans la huitiéme Section. Car si l'on imagine un autre rayon incident pm infiniment proche de PM; il est clair que le réfléchi mh coupera MH au point cherché F, par lequel ayant tiré FE paral-

lele à PM, l'on nommera CE, u; EF, z; CP, x; PM, y; CM, a: & l'on trouvera comme ci-dessus $\frac{aax + aau - 2uxx}{xy} = 2z$. Or il est visible que CM, CE, EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'est pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant a, u, z, comme constantes, & x, y comme variables; ce qui donnera $2uyxxdx + aauydx - aaxxdy - aauxdy + 2ux^3dy = 0$, dans laquelle mettant pour dx sa valeur $-\frac{ydy}{x}$ (que l'on trouve en prenant la différence de $yy = aa - xx$), & ensuite pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient enfin $CE\ (u) = \frac{x^3}{aa}$.

Si l'on suppose que la courbe AMB ne soit plus un quart de cercle, mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de sa dévelopée au point M la droite MC; il est clair * que sa petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C. D'où il suit que si l'on mene par ce centre la perpendiculaire CP sur le rayon incident PM, & qu'ayant pris $CE = \frac{x^3}{aa}$ ($CP = x$, $CM = a$), l'on tire EF parallele à PM; elle ira couper le rayon réfléchi MH au point F, où il touche la caustique AFK. * *Art.* 76.

Si l'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB, des lignes droites MC, mC à un point fixe C de son axe AC, & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, en sorte que l'angle $CMH = MCH$, & $Cmh = mCh$; & qu'il faille trouver sur chaque MH le point F où elle touche la courbe AFK, formée par les intersections continuelles de ces droites MH, mh. On trouvera comme auparavant $CH = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{zx - uy}{x - u}$: d'où l'on tire $\frac{x^3 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z$, dont la difference (en traitant u, z comme constantes, & x, y comme variables) donne $2x^3ydx - uxxydx - x^4dy + ux^3dy + xxyydy + uxyydy - uy^3dx = 0$; & partant la cherchee

$CE\ (u) = \frac{2x^3ydy - x^4dy + xxyydy}{xxydx - x^3dy + y^3dx - xyydy}$. Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans l'expression de CE, cette expression sera délivrée des différences & entiérement connue.

PROPOSITION VII.

Problême.

FIG. 156. 209. SOIT *une ligne droite indéfinie* AO *qui ait un commencement fixe au point* A; *soit entendue une infinité de paraboles* BFD, CDG *qui ayent pour axe commun la droite* AO, *& pour paramétres les droites* AB, AC *interceptées entre le point fixe* A, *& leurs sommets* B, C. *On demande la nature de la ligne* AFG *qui touche toutes ces paraboles.*

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD, CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe AO; que AC devenant égal à AB, le point d'intersection D tombe sur le point touchant F. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mene l'appliquée DO, & qu'on nomme les données AO, u; OD, z; & l'inconnue AB, x; la propriété de la parabole donnera $AB \times BO\ (ux - xx) = \overline{DO}^2\ (zz)$; & ordonnant l'égalité, l'on aura $xx - ux + zz = 0$. Or il est évident que u exprimant AO; & z, OD; cette égalité a deux racines inégales, sçavoir AB, CA: & qu'au contraire u exprimant AE; & z, EF; AC devient égale à AB, c'est à dire qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique $1, 0, -1$: ce qui donne $x = z$; & substituant cette valeur à la place de x, il vient l'équation $u = 2z$ qui doit exprimer la nature de la ligne AFG. D'où l'on voit que AFG est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est est double de EF.

Si l'on veut réſoudre cette queſtion en général, de quelque degré que puiſſent être les paraboles *BFD*, *CDG* ; on ſe ſervira de la Méthode expliquée dans la Section huitiéme, en cette ſorte. Nommant *AE*, u ; *EF*, z ; *AB*, x ; l'on aura $\overline{u - x}^{m} \times n^{n} = z^{m+n}$ qui exprime en général la nature de la parabole *BF*, dont la différence donne (en traitant u & z comme conſtantes, & x comme variables) $- m \times \overline{u - x}^{n-1} dx \times x^{n} + nx^{n-1} dx \times \overline{u - x}^{m} = o$; & diviſant par $\overline{u - x}^{m-1} dx \times x^{n-1}$, il vient $- mx + nu - nx = o$: d'où l'on tire $x = \frac{n}{m+n} u$; & partant $u - x = \frac{m}{m+n} u$. Mettant donc ces valeurs à la place de $u - x$, & de x dans l'équation générale ; & faiſant (pour abréger) $\frac{m}{m+n} = p$, $\frac{n}{m+n} = q$, $m + n = r$, l'on aura $z = \sqrt[r]{\overline{p^{m} q^{n}}}$. D'où l'on voit que la ligne *AFG* eſt toujours droite, ſi compoſées que puiſſent être les paraboles, n'y ayant que la raiſon de *AE* à *EF* qui change.

On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle maniére l'on doit ſe ſervir de la Méthode de Mrs Deſcartes *&* Hudde *pour réſoudre ces ſortes de queſtions lorſque les Courbes ſont Géométriques. Mais l'on voit auſſi en même temps qu'elle n'eſt pas comparable à celle de M.* Leibnits, *que j'ai taché d'expliquer à fond dans ce Traité : puiſque cette derniere donne des réſolutions générales où l'autre n'en fournit que de particuliéres, qu'elle s'étend aux lignes tranſcendantes, & qu'il n'eſt point néceſſaire d'ôter les incommenſurables : ce qui ſeroit très ſouvent impraticable.*

FIN.

A PARIS, de l'Imprimerie de J. QUILLAU, Imp. Jur. Lib. de l'Univ.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Seneschaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé FRANÇOIS MONTALANT, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il avoit acquis un Ouvrage intitulé : *Analyse des Infiniment Petits*, lequel il désireroit faire imprimer & donner au Public ; mais comme il ne le peut faire sans s'engager à une très grande dépense, il Nous auroit en conséquence fait très humblement supplier de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires ; A ces causes voulant favorablement traiter ledit Exposant, & reconnoitre son zele à Nous procurer un Ouvrage aussi utile pour le Public ; & voulant le dédommager des grands frais qu'il est obligé de faire pour l'impression dudit Ouvrage, Nous lui avons permis & permettons par ces Presentes de faire imprimer ledit Analyse des Infiniment Petits en tels Volumes, forme, marge, caractere, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de douze années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes : Faisons défenses à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance ; & à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter, ni contrefaire ledit Analyse des Infiniment Petits en tout ni en partie, d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titres ou autrement, sans le consentement par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts ; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs Libraires de Paris ; & ce dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier, & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de l'exposer en vente il en sera mis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre trés-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Voysin, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant, ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & autres Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le douziéme jour du mois de Décembre, l'an de grace mil sept cens quatorze, & de notre Regne le soixante-douziéme. Par le Roy en son Conseil, FOUQUET.

Registré sur le Registre n. 3 de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris page 900. *n.* 1134. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du* 13 *Aoust* 1703. *Fait à Paris le* 25 *Janvier* 1715. ROBUSTEL, Syndic.

141.
A B G M P M N D M P M m R p R F

142.
E M G D A D P H F

143.
E G D H F

148.
D F K M H L T A P E B

149.
D F M L T A P E B

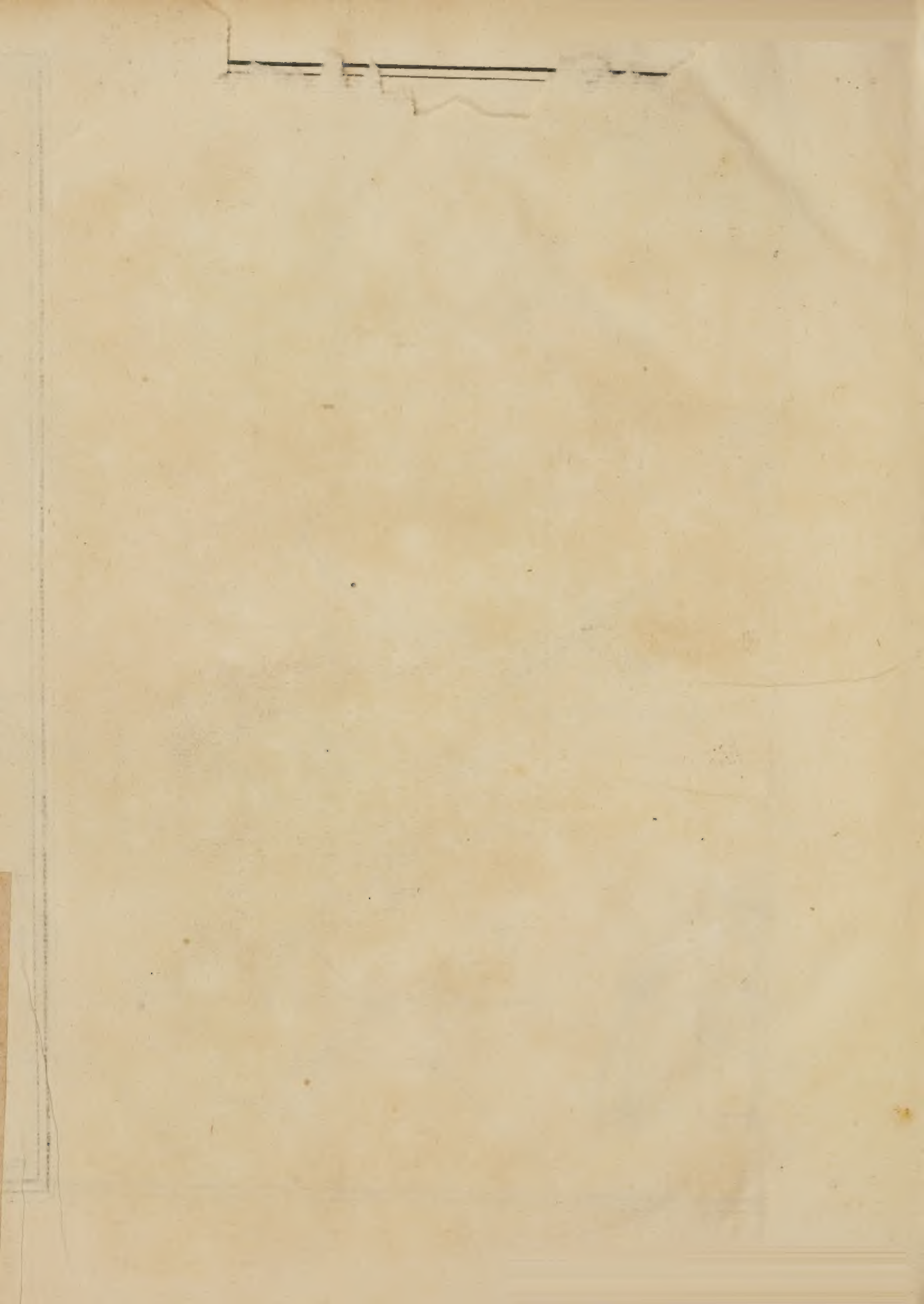
150.
K F D M H A P E B

151.
D M N A Q P B K E C

152.
D M A P C B

155.
H B h G L K S C

156.
G F D A B b E C O H




CE


GretagMacbeth™ ColorChecker Color Rendition Chart